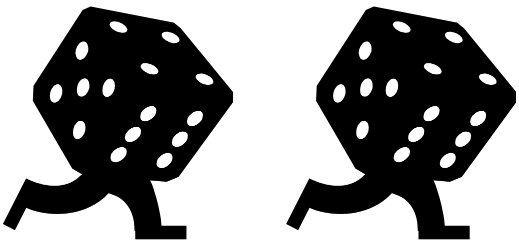
Stochastisches Denken – Lehren und Lernen

Aufgaben und Lösungen



Zusammengestellt für Lehrerfortbildungen „Mathematik Anders Machen“ 2009

Prof. Dr. Wilfried Herget
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Mathematik – Didaktik der Mathematik
wilfried.herget( )mathematik.uni-halle.de

Dr. Elke Kösters
Wolfram-von-Eschenbach-Hauptschule Wiesbaden
ekoesters( )gmx.de

Dr. Petra Merziger
Lutherschule Hannover
petramerziger( )web.de

Inhaltsverzeichnis

		Aufgabe	Lösung
I.	Erhebung, Analyse und Darstellung von Daten		
I.1	Eine Erhebung planen und durchführen	2	
I.2	Übungen zum Mittelwert	2	19
I.3	Häufigkeitsverteilungen: Notenspiegel	3	19
I.4	Säulendiagramm: Verzehr von Milch und Milchprodukten	4	20
I.5	Kreisdiagramm: Umfrage	4	20
I.6	Boxplot: Klassenvergleich Weitsprung	5	21
I.7	Boxplot: Handykosten	5	21
II.	Voraussagen mit relativen Häufigkeiten (empirische Wahrscheinlichkeiten)		
II.1	Schätzen von Wahrscheinlichkeiten durch Experimente	6	
III.	Zufall und Prognosen (theoretische Wahrscheinlichkeiten)		
III.1	Kugeln im Glas	7	22
III.2	Chancen beim Würfeln	7	22
III.3	Pferderennbahn (Würfelspiel)	8	23
IV.	Mehrstufige Zufallsexperimente (ideale Zufallsexperimente)		
IV.1	Gefäß – Ziehen ohne Zurücklegen	9	23
IV.2	Zwei Glücksräder	9	23
IV.3	Zwillinge ziehen	9	24
IV.4	„Differenz gewinnt“ (Würfelspiel)	10	24
V.	Nicht ideale Zufallsexperimente		
V.1	Würfeln mit einem gezinkten Würfel	11	25
V.2	Würfeln mit einem Stein	12	
V.3	Wahrscheinlichkeiten beim Reißnagelwurf	13	
VI.	Rückschlüsse aus Baumdiagrammen		
VI.1	Geldfälscher	14	25
VI.2	„Montagsfahrräder“	14	26
VI.3	Der Schein kann trügen	14	26
VII.	Computergestützte Stochastik		
VII.1	Mittelwert der Körpergröße	15	
VII.2	Simulation eines idealen Würfels mit Excel®	16	
VII.3	Summe zweier Würfel	17	

Die Aufgaben I.2–7, III.1–2, IV.1–2, V.1–3, VII.1–3 stammen von Elke Kösters, 2009.

I. Erhebung, Analyse und Darstellung von Daten

Inhaltliche Schwerpunkte: absolute und relative Häufigkeit, Mittelwert, Diagramme, Boxplot, Median (Zentralwert), Spannweite, Quartile

I.1 Eine Erhebung planen und durchführen

Du kannst zusammen mit einem oder mehreren deiner Mitschüler(innen) selbst statistische Erhebungen durchführen. Bereitet die Ergebnisse so auf, dass sie in der Schülerzeitung oder auf der Homepage der Schule veröffentlicht werden können. Hier einige Vorschläge – ihr findet sicherlich noch mehr:

- Was halten Schülerinnen und Schüler der Klassen 5–10 vom Lesen? Welche Bücher sind beliebt?
- Was halten Schülerinnen und Schüler der Klassen 5–10 vom Sport? Welche Sportarten sind am beliebtesten? Welche Sportarten werden von ihnen selbst ausgeführt, welche von ihnen gern im Fernsehen betrachtet?
- Was halten Schülerinnen und Schüler der Klassen 5–10 von Computerspielen? Wie groß sind die absolute und die relative Häufigkeit der Schülerinnen und Schüler, die selbst Computerspiele haben?
- …

Offenere Variante
Stellt euch vor, an eurer Schule soll ein Schulkiosk eröffnet werden und ihr seid in der Planungsgruppe. Welche Daten haltet ihr für die Planung für sinnvoll? Führt eine Erhebung durch!

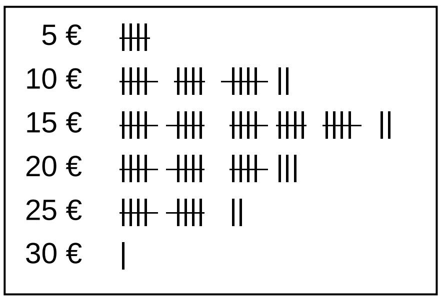
I.2 Übungen zum Mittelwert

Trainieren von Standardverfahren

a) Berechne den Notendurchschnitt der Klasse (runde auf eine Nachkommastelle).

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	5	9	7	3	1

b) „Wie viel € wöchentliches Taschengeld hast du?“ wurden die 80 Schülerinnen und Schüler der 7. Klasse der Talschule gefragt.



1. Wie hoch ist das durchschnittliche Taschengeld?
2. Angenommen, diese Jugendlichen sind repräsentativ für alle 4000 Jungen und Mädchen dieses Alters in derselben Stadt, über wie viel Taschengeld verfügen sie wohl alle zusammen?

Offenere Varianten

c) Weitsprung-Training. Wen sollte der Lehrer zur Meisterschaft schicken?

Andy	**Boris**	**Chris**	**Dany**
4,62 m	4,73 m	4,30 m	4,95 m
4,89 m	4,19 m	4,91 m	4,39 m
4,91 m	4,65 m	4,55 m	5,02 m
4,17 m	4,73 m	4,25 m	4,14 m
4,09 m	4,83 m	4,27 m	4,45 m

d) Bei den vier Mädchen Jana, Lisa, Suse und Lena entscheidet sich der Lehrer, diejenige mit dem zweitbesten Durchschnitt mit zur Meisterschaft zu nehmen. Welche Gründe könnte der Lehrer dafür haben? Wie könnten dazu die einzelnen Weitsprungergebnisse der Mädchen vielleicht aussehen?

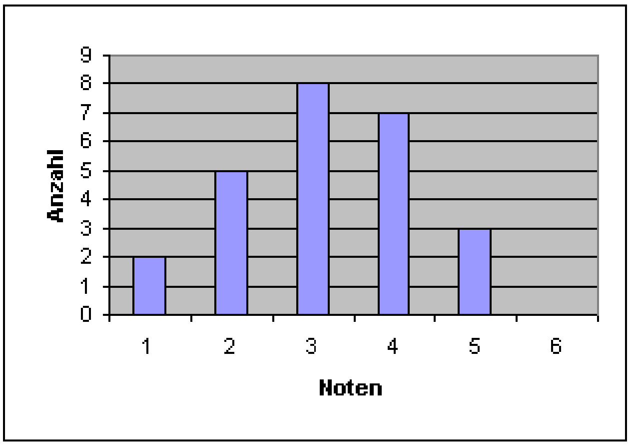
I.3 Häufigkeitsverteilung: Notenspiegel

Gegeben ist der Notenspiegel der Klasse 7a

Noten	2	4	3	3	4	2	5	3	4	2	1	4	3	2	4	5	3	3	3	2	1	3	5	4	4

Auswertung einer Klassenarbeit

Note	Anzahl
1	2
2	5
3	8
4	7
5	3
6	0
gesamt	25



Für die 7b liegt eine Urliste vor.

3	2	4	5	2	5	3	4	4	5	3
2	4	1	3	5	5	3	2	3	3	6

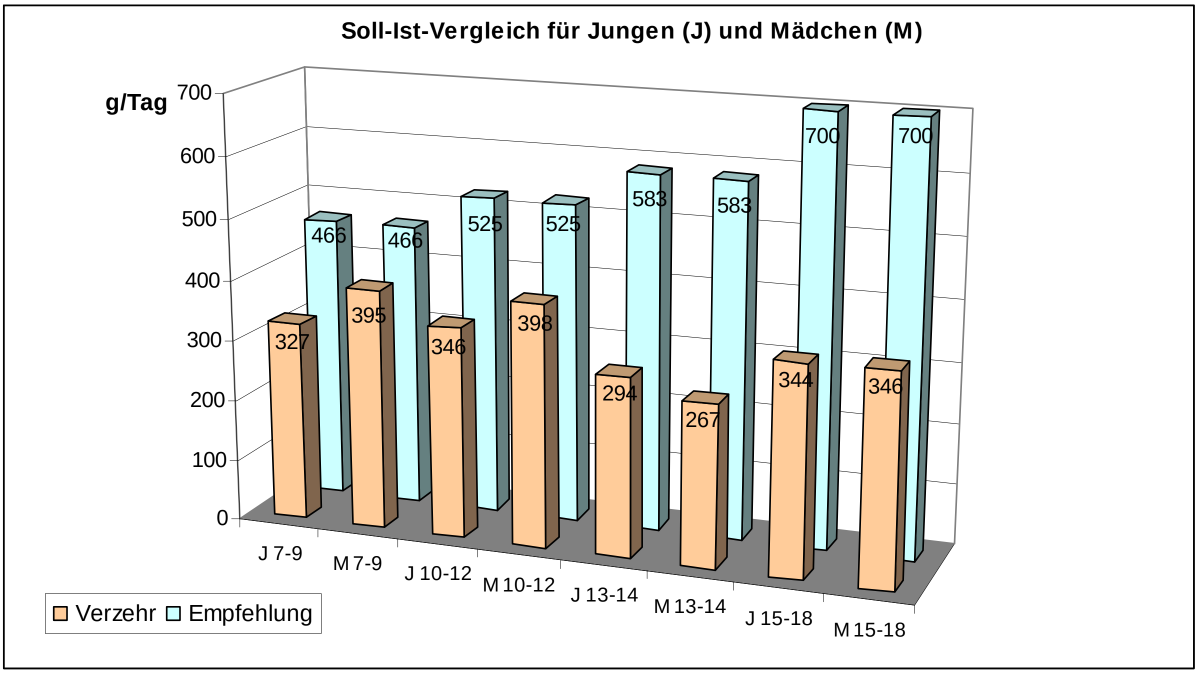
a) Erstelle aus der Urliste der 7b eine Häufigkeitsliste.

b) Zeichne ein Säulendiagramm für die Notenverteilung.

c) Beschreibe, wie die Arbeit in den beiden Klassen ausgefallen ist.

Tipp: Du kannst auch ein Tabellenkalkulationsprogramm benutzen.

I.4 Säulendiagramm: Verzehr von Milch und Milchprodukten



a) Zeichne für die Differenzen ein Säulendiagramm.

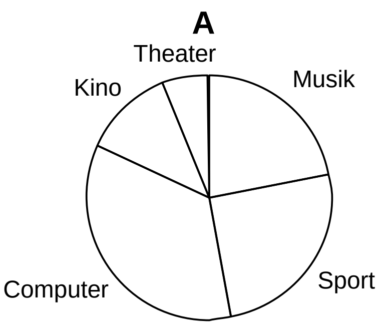
b) In welcher Gruppe ist das Defizit am größten?

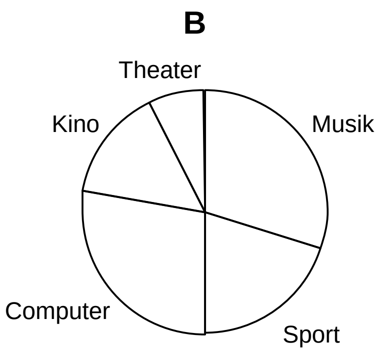
I.5 Kreisdiagramm: Umfrage

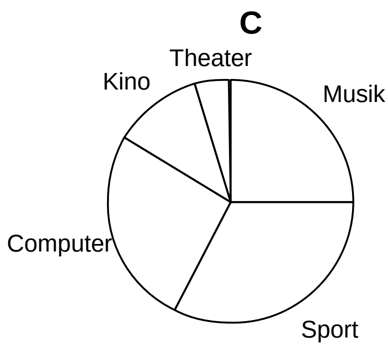
Schülerinnen und Schüler der 7. und 8. Klassenstufe der Albert-Einstein-Schule wurden nach ihrer bevorzugten Freizeitbeschäftigung befragt. Die Tabelle zeigt das Ergebnis dieser Umfrage.

In meiner Freizeit beschäftige ich mich am liebsten mit…				
Musik	Sport	Computer	Kino	Theater
50	65	52	24	9

a) Entscheide, welches der folgenden Kreisdiagramme die Daten aus der Tabelle darstellt.







b) Stelle die Umfrageergebnisse in einem Streifendiagramm dar (100 % entsprechen 10 cm).

I.6 Boxplot: Klassenvergleich Weitsprung

Die 8. Klassen machen einen Sportvergleich im Weitsprung.

Die Klassen haben die folgenden Ergebnisse (in cm) erreicht:

Klasse 8a: 430, 410, 430, 440, 430, 400, 410, 470, 440, 420, 410, 430, 425, 450, 430, 420, 435, 410, 420, 410, 435

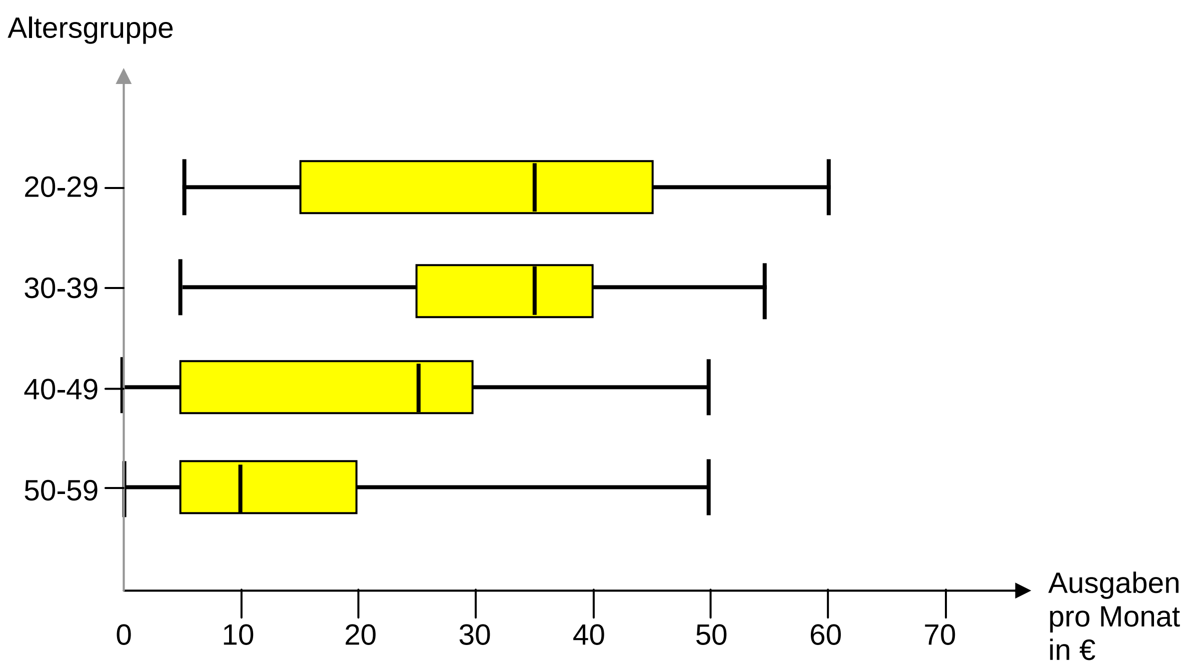
Klasse 8b: 410, 455, 460, 420, 420, 440, 410, 460, 400, 420, 425, 450, 410, 425, 400, 415, 460, 455, 410, 405, 410, 450, 450, 390

Klasse 8c: 410, 420, 440, 430, 450, 450, 400, 415, 410, 400, 440, 430, 445, 430, 410, 420, 450, 400, 410, 420, 440, 430

Fertige ein Boxplot an. Bestimme dazu jeweils den Mittelwert, den Medianwert, die Spannweite sowie das obere und das untere Quartil. Welche Klasse ist eigentlich die beste?

I.7 Boxplot: Handykosten

Die vier Boxplots geben das Ergebnis einer Umfrage nach den durchschnittlichen Handykosten pro Monat abhängig von der Altersgruppe wieder.



a) Fasse in der Tabelle alle Kennwerte, die du ablesen kannst, zusammen.

Altersgruppe	Minimum	Quartil 1	Median	Quartil 3	Maximum
20–29					
...					

b) Eine Zeitung schreibt zu der Umfrage: „Die 20- bis 29-Jährigen geben am meisten Geld für das Handy aus“. Stimmt das?

c) Vergleiche die Boxplot miteinander. Schreibe fünf Aussagen dazu auf.

II. Voraussagen mit relativen Häufigkeiten (empirische Wahrscheinlichkeiten)

II.1 Vermuten von Wahrscheinlichkeiten und Schätzen durch Experimente

Lässt man eine Wäscheklammer oder einen Kronkorken auf den Tisch fallen, dann gibt es jeweils zwei mögliche Ergebnisse.

	Wäscheklammer		Kronkorken	
Ergebnisse				
Vermutete Wahrscheinlichkeit				
Relative Häufigkeit				

a) Schätze die Wahrscheinlichkeit für das jeweilige Ergebnis, und trage deine Schätzwerte ein.

b) Du kannst leicht überprüfen, ob deine Schätzungen gut lagen. Führe jedes Experiment 100-mal aus, und ermittle die relativen Häufigkeiten. Tipp: Statt eine Wäscheklammer 100-mal zu werfen, kann man auch 10 Wäscheklammern 10-mal werfen.

c) Ergänze die Tabelle, und vergleiche deine Vermutungen mit den ermittelten relativen Häufigkeiten. Bei welchem Versuch hast du dich am meisten geirrt?

Offenere Variante

Denke dir weitere Experimente mit Alltagsgegenständen aus, und führe sie durch!

Noch offenere Variante

Manipuliere einen Kronkorken bzw. eine Reißzwecke so, dass die Wahrscheinlichkeit für jede der beiden Lagen möglichst genau ½ ist!

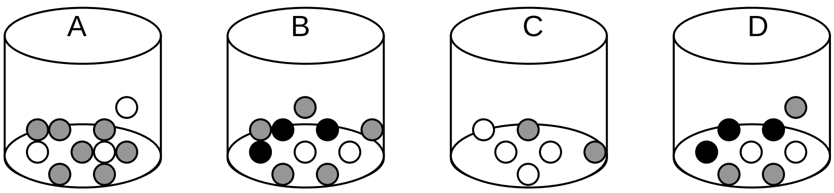
III. Zufall und Prognosen (theoretische Wahrscheinlichkeiten)

Inhaltliche Schwerpunkte: Zufall, Ereignis, günstiges Ergebnis, Wahrscheinlichkeitsbegriff, Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

III.1 Kugeln im Glas (Partnerarbeit)

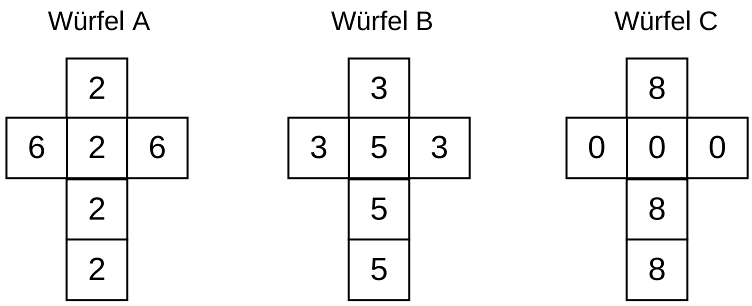
Spielregeln: Zunächst wählst du eines der Gefäße aus. Dann werden dir die Augen verbunden, und du ziehst eine Kugel. Ziehst du eine weiße Kugel, gibt es einen Gewinn.

a) Diskutiere mit deiner Partnerin/deinem Partner, bei welchem Gefäß du die besten Chancen hast und bei welchem die schlechtesten. Begründe!



b) Du hast 4 weiße, 4 schwarze und 4 graue Kugeln. Wie müsstest du ein Gefäß füllen, damit die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, bei 3/10 liegt?

III.2 Chancen beim Würfeln



a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit Würfel A eine 6 zu würfeln?

b) Mit einem der drei abgebildeten Würfel ist 1200-mal gewürfelt worden, 809-mal war das Ergebnis eine Zahl kleiner als 3. Welcher Würfel wird das wohl gewesen sein? Begründe deine Antwort.

c) Anna und Birgin spielen mit den Würfeln. Folgende Spielregeln werden vereinbart:

- Der erste Spieler wählt einen der drei Würfel.
- Der zweite Spieler wählt einen anderen Würfel.
- Das Spiel gewinnt derjenige, der die höchste Zahl würfelt.

Anna wählt Würfel A. Welchen Würfel sollte dann Birgin wählen? Begründe deine Antwort.

III.3 Pferderennbahn

Würfelspiel für zwei Partner

Ihr braucht: 2 Würfel, 2 Spielsteine (z. B. einen roten, einen gelben), Spielplan

Anleitung:
Jede/jeder wirft einen der beiden Würfel, die beiden Augenzahlen werden addiert.
Der „rote“ Reiter rückt ein Feld vor, wenn die Summe 5, 6, 7, 8 oder 9 ist.
Der „gelbe“ Reiter rückt ein Feld vor, wenn die Summe 2, 3, 4, 10, 11 oder 12 ist.

a) Was schätzt du: Ist das Spiel gerecht?

b) Probiert es aus!

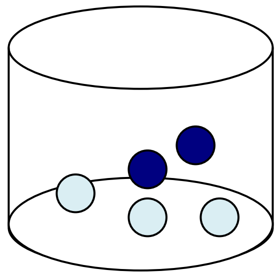
Start	
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
11	11
12	12
13	13
14	14
15	15
16	16
17	17
18	18
19	19
20	20
21	21
22	22
23	23
24	24
ZIEL	

Nach: SINUS Schleswig-Holstein 2003; leicht überarbeitet (Wilfried Herget)

IV. Mehrstufige Zufallsexperimente (ideale Zufallsexperimente)

Inhaltliche Schwerpunkte: mehrstufiges Zufallsexperiment, Ziehen mit Zurücklegen bzw. ohne Zurücklegen, Baumdiagramm, Pfadregeln

IV.1 Gefäß – Ziehen ohne Zurücklegen



In einem Gefäß sind 3 graue und 2 schwarze Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

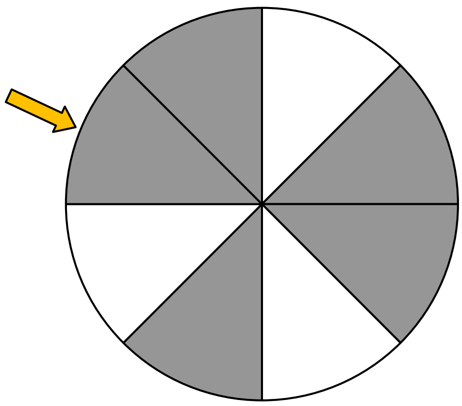
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 2 schwarze Kugeln gezogen werden?

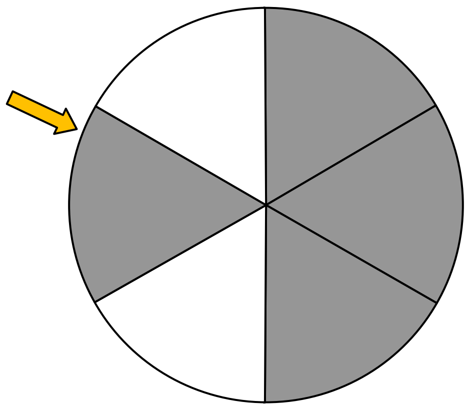
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 2 graue Kugeln gezogen werden?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine graue und eine schwarze Kugel gezogen werden (beliebige Reihenfolge)?

IV.2 Zwei Glücksräder

Die abgebildeten Glücksräder werden gleichzeitig gedreht, unabhängig voneinander.





Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) bleiben beide Glücksräder auf Grau stehen?

b) bleiben beide Glücksräder auf Weiß stehen?

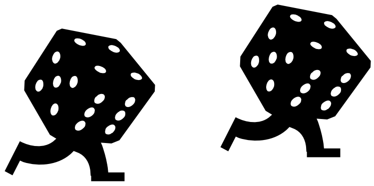
c) bleibt mindestens 1 Glücksrad auf Weiß stehen?

IV.3 Zwillinge ziehen *

Auf dem Tisch liegen 6 Karten, und zwar 3 Damen, 2 Buben und 1 König. Man zieht nacheinander zwei Karten. Stimmen sie überein, dann hat man gewonnen.
Wird man in diesem Spiel wohl oft gewinnen? Probiert es zu zweit aus und überlegt.

*) Nach: Herget, Wilfried; Jahnke, Thomas; Kroll, Wolfgang: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Cornelsen, Berlin 2001/2008. ISBN 3-464-54360-9

IV.4 „Differenz gewinnt“



Spielregeln

- Das Spiel wird zu zweit gespielt.
- Benötigt werden: 2 Würfel, ein Spielplan.
- Jeder Spieler verteilt 18 kleine Kreise mit dem Bleistift auf dem Spielplan.
- Es wird reihum jeweils mit 2 Würfeln gewürfelt. Die/der Jüngere beginnt. Das Ergebnis eines Wurfes ist die Differenz der Augenzahlen
- Wenn die Differenz z. B. 3 beträgt, so wird ein Kreis aus der Spalte „3“ durchgestrichen. Befindet sich dort kein Kreis, dann hat man Pech gehabt.
- Gewonnen hat, wer zuerst alle Kreise durchgestrichen hat.

Partner-Spielpläne für „Differenz gewinnt“

Name ______________________________

0	1	2	3	4	5

Name ______________________________

0	1	2	3	4	5

V. Nicht ideale Zufallsexperimente

Inhaltliche Schwerpunkte: Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, Schätzen von Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten

V.1 Würfeln mit einem gezinkten Würfel

Einer der beiden Würfel ist gezinkt – welcher ist es?

Wie kannst du das herausbekommen?

100-mal Würfel A

1	6	4	3	2	6	3	6	6	3
6	3	1	4	6	6	3	5	4	2
1	5	6	1	2	1	6	5	2	6
6	5	6	3	6	5	3	6	1	6
5	2	6	5	3	6	4	2	5	2
3	5	3	6	1	5	3	6	5	6
5	6	5	6	5	1	6	5	2	5
6	4	6	4	6	4	6	1	6	4
4	6	2	3	6	1	6	5	4	3
3	6	6	4	2	4	4	6	2	4

100-mal Würfel B

1	3	5	3	2	3	4	3	2	3
5	1	4	6	1	1	4	1	4	6
5	2	3	5	3	5	2	5	3	3
1	6	1	2	5	2	1	6	4	1
3	4	5	3	4	1	6	2	1	6
2	1	1	5	2	5	5	4	5	4
5	3	3	3	6	1	2	6	1	6
5	2	3	2	1	2	6	4	6	5
4	5	1	3	5	6	4	1	6	4
6	4	6	2	4	3	2	6	5	2

V.2 Würfeln mit einem Stein

Mache dir aus einem quaderförmigen Stein einen 6-seitigen Würfel, und schätze die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Seiten a) vorab, b) mithilfe eines Zufallsexperiments.

Ergebnisse beim Würfeln:

Wurf	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						
26						
27						
28						
29						
30						
31						
32						
33						
34						
35						
36						
37						
38						
39						
40						
Summe						

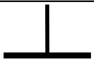
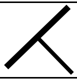
Wurf	1	2	3	4	5	6
41						
42						
43						
44						
45						
46						
47						
48						
49						
50						
51						
52						
53						
54						
55						
56						
57						
58						
59						
60						
61						
62						
63						
64						
65						
66						
67						
68						
69						
70						
71						
72						
73						
74						
75						
76						
77						
78						
79						
80						
Summe						

Wurf	1	2	3	4	5	6
81						
82						
83						
84						
85						
86						
87						
88						
89						
90						
91						
92						
93						
94						
95						
96						
97						
98						
99						
100						
101						
102						
103						
104						
105						
106						
107						
108						
109						
110						
111						
112						
113						
114						
115						
116						
117						
118						
119						
120						
Summe						

Vergleiche die Ergebnisse deines Steins mit denen der anderen.
Welchen Stein würdet ihr zum Spielen auswählen und warum?

V.3 Wahrscheinlichkeiten beim Reißnagelwurf

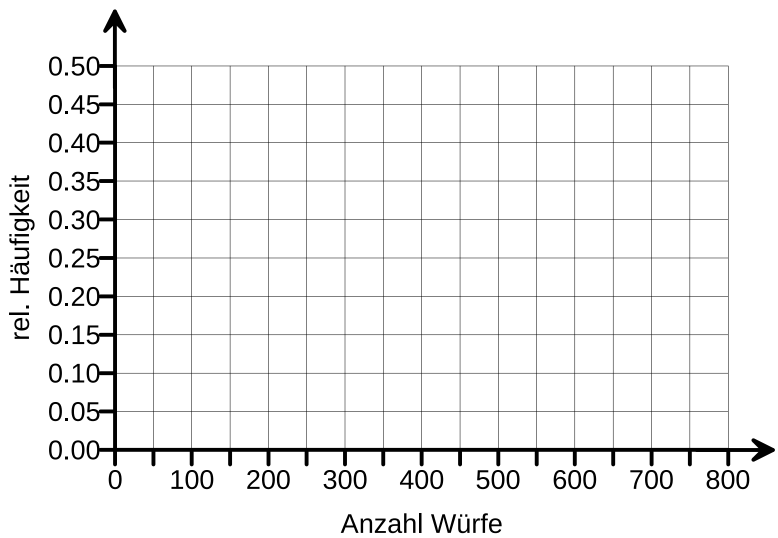
Werft den Reißnagel 50-mal und haltet eure Ergebnisse in Form einer Strichliste in der nachfolgenden Tabelle fest.

„Kopf“ 	„Seite“ 

Die Ergebnisse der ganzen Klasse werden nun in der Tabelle gesammelt, und die relativen Häufigkeiten von „Kopf“ und von „Seite“ werden berechnet. Dabei ist die Anzahl der nächsten 50 Würfe für die beiden Ergebnisse jeweils zu der schon bestehenden Anzahl hinzuzuaddieren.

Anzahl Würfe	Anzahl „Kopf“	Anzahl „Seite“	Rel. Häufigkeit „Kopf“	Rel. Häufigkeit „Seite“
50				
100				
150				
200				
250				
300				
350				
400				
450				
500				
550				
600				
650				
700				
750				
800				

Trage die relativen Häufigkeiten von „Kopf“ und „Seite“ aus der Tabelle gegen die Anzahl der Würfe im Koordinatensystem auf, und verbinde die eingetragenen Punkte.
Welche Werte für die Wahrscheinlichkeiten für „Kopf“ und für „Seite“ würdest du aufgrund dieser Darstellung annehmen?



VI. Rückschlüsse aus Baumdiagrammen

VI.1 Geldfälscher

Nach einer Schätzung von Experten kann man bei 100 000 Scheinen mit etwa 200 Fälschungen rechnen.

a) Du kannst als Laie nicht über die Echtheit deines 20-€-Scheins im Geldbeutel entscheiden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(F)$, dass der Schein gefälscht ist?

b) Die Bank hat für die Kunden einen Prüfautomaten aufgestellt. Bei einem falschen Schein gibt der Automat eine Blinkwarnung. Leider ist der Automat noch nicht absolut zuverlässig: Einen falschen Schein erkennt er mit 95 %iger Sicherheit, d. h. von 100 falschen Scheinen erkennt er dies in der Regel bei 95 Scheinen. Umgekehrt gibt er bei einem echten Schein in 10 % der Fälle einen falschen Blinkalarm.

Bei der Prüfung deines Scheins blinkt der Automat.
Wie groß schätzt du nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schein falsch ist?

(1) $P(F\|B) = 2\%$?	(2) $P(F\|B) = 20\%$?	(3) $P(F\|B) = 80\%$?

$P(F|B)$ bedeutet: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schein gefälscht ist unter der Bedingung, dass der Automat blinkt.

c) Mithilfe einer sogenannten Vierfeldertafel kann man $P(F|B)$ berechnen. Stell dir

VI.2 „Montagsfahrräder“

Beispiele

C *„Montagsfahrräder“*

Du stellst beim Kauf eines neuen Fahrrads der Firma *„byce“* einen Montagefehler fest. „So ein Pech, ich habe wohl ein Montagsfahrrad erwischt“.
Die Firma *„byce“* stellt Fahrräder her. Leider kommt es bei der Endmontage zu Fehlern, die vor der Auslieferung nicht bemerkt werden. Aus einer betriebsinternen Untersuchung geht hervor, dass montags montierte Fahrräder mit 15 % eine deutlich höhere Fehlerwahrscheinlichkeit als die dienstags bis freitags montierten aufweisen (zusammen nur 5 %). Es wird an allen Tagen (Montag bis Freitag) in etwa die gleiche Stückzahl montiert.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft die oben geäußerte Vermutung zu?

VI.3 Der Schein kann trügen

13 *Der Schein kann trügen*

Angenommen, in deinem Ort sind etwa 1 % der Autofahrer Millionäre. Von ihnen fahren etwa 90 % einen Wagen der Oberklasse. Von den übrigen Autofahrern fahren etwa 10 % einen solchen Wagen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Wagen der Oberklasse, der an dir vorbeifährt, ein Millionär der Fahrer ist?

b) Du machst Urlaub in einem Ort der „Reichen und Schönen“, in dem etwa 70 % der Autofahrer Millionäre sind. Die anderen Anteile (90 % und 10 %) sollen auch hier gelten. Berechne nun mit dem veränderten Anteil die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Wagen der Oberklasse, der an dir vorbeifährt, ein Millionär der Fahrer ist.

Quelle: Mathematik Neue Wege. Niedersachsen. 9. Schuljahr. Bildungshaus Schulbuchverlage 2007, S. 222 ff.

VII. Computergestützte Stochastik

Inhaltliche Schwerpunkte: Tabellenkalkulation, Zufallsgenerator, Mittelwert, absolute und relative Häufigkeit

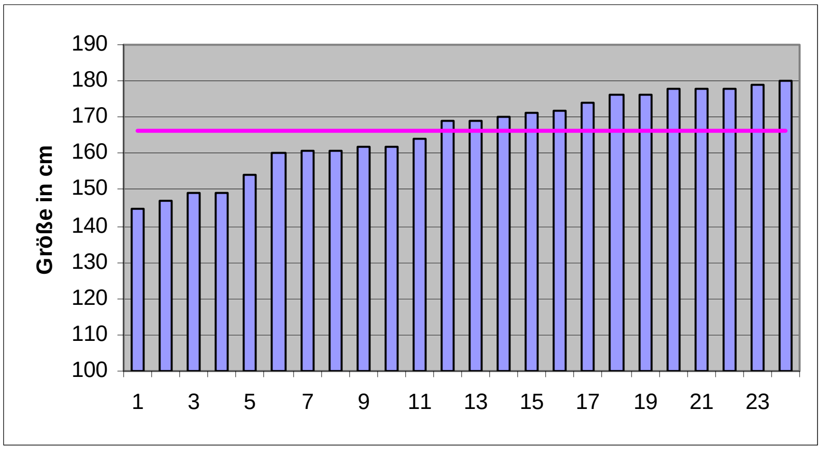
VII.1 Mittelwert der Körpergröße

Tabelle: Körpergröße der Klasse 7a

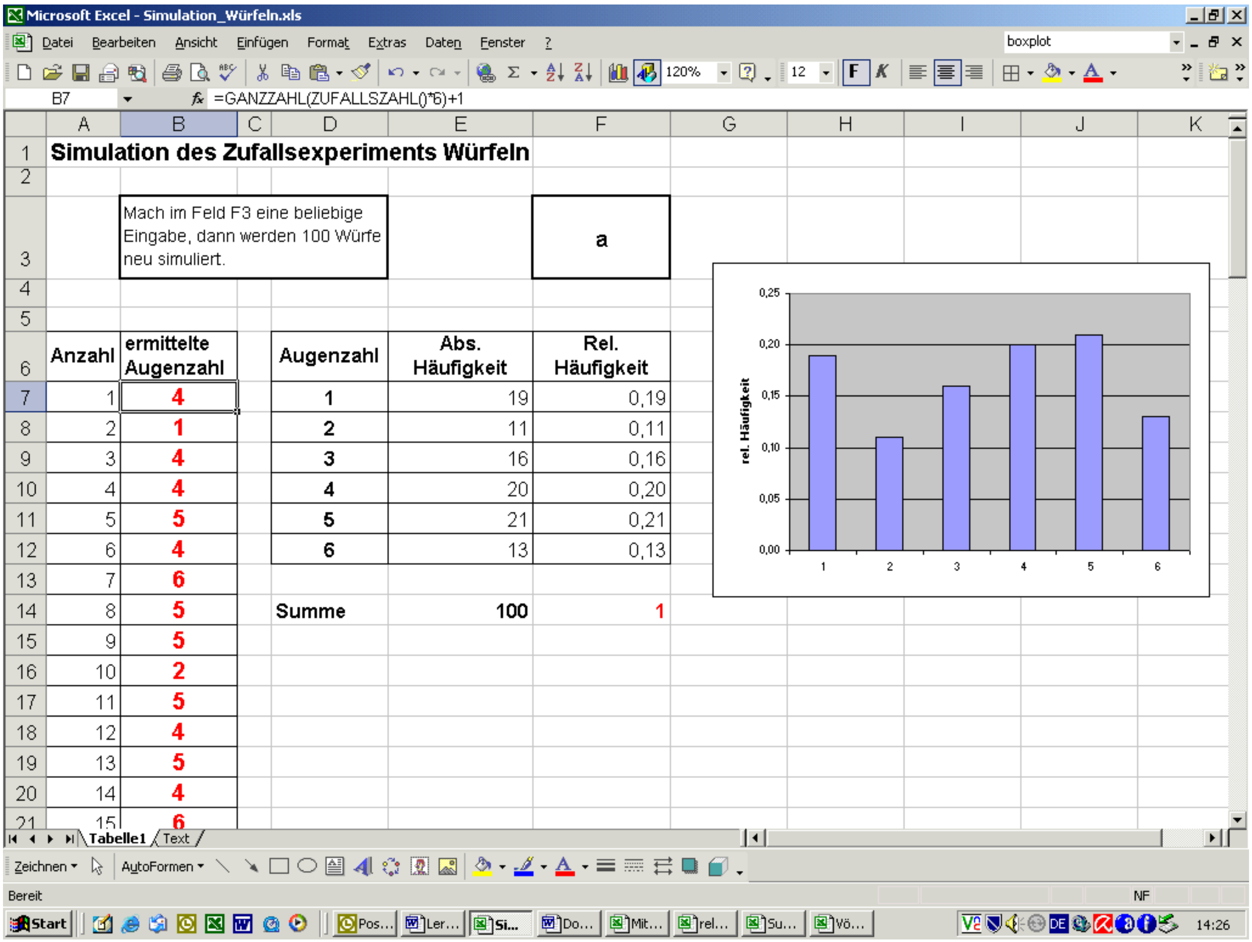
Anzahl	Name	Größe in cm
1	Bea	145
2	Sara	147
3	Patrick	149
4	Steffi	149
5	Tim	154
6	Sascha	160
7	Steffen	161
8	Bianca	162
9	Jessica	162
10	Julia	162
11	Anika	164
12	Anton	169
13	Leo	169
14	Lysia	171
15	Sedat	172
16	Alex	172
17	Viktor	174
18	Peter	176
19	Ina	176
20	Maren	178
21	Jens	178
22	Ben	178
23	Luise	179
24	Agathe	180

a) Übertrage die Tabelle in ein Tabellenkalkulationsprogramm, und berechne den Mittelwert.

b) Stelle die Werte der Tabelle und den Mittelwert in einem Diagramm dar.



VII.2 Simulation eines idealen Würfels mit Excel®



Anzahl	ermittelte Augenzahl
1	4
2	1
3	4
4	4
5	5
6	4
7	6
8	5
9	5
10	2
11	5
12	4
13	5
14	4
15	6

Augenzahl	Abs. Häufigkeit	Rel. Häufigkeit
1	19	0,19
2	11	0,11
3	16	0,16
4	20	0,20
5	21	0,21
6	13	0,13
Summe	100	1

Um einen idealen Würfel zu simulieren, kann man die folgenden Funktionen nutzen:

= ZUFALLSZAHL(): Erzeugen einer Zahl zwischen 0 und 1.

= ZUFALLSZAHL()*6: Erzeugen einer Zahl zwischen 0 und 5.

B7: = GANZZAHL(ZUFALLSZAHL()*6)+1: Erzeugen von ganzen Zahlen zwischen 1 und 6.

E7: = ZÄHLENWENN(B7:B107;1): Berechnen der absoluten Häufigkeit einer simulierten 1.

= SUMME(E7:E12): Berechnen der gesamten Anzahl.

a) Übertrage für eine eigene Simulation die Formeln in ein Tabellenkalkulationsprogramm.

b) Erweitere die Anzahl auf 1000 Würfe.

c) Erstelle ein Säulendiagramm.

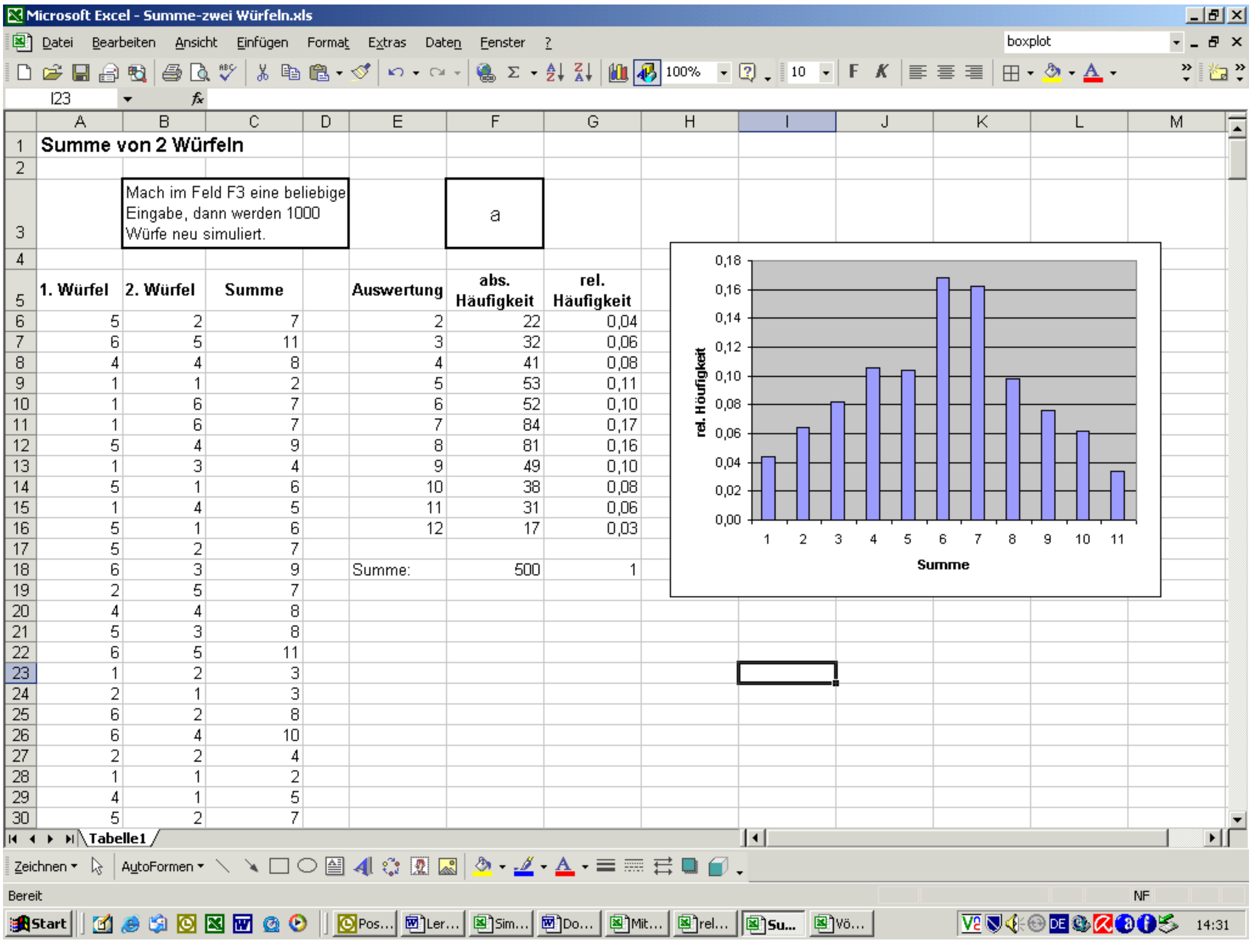
VII.3 Summe zweier Würfel

Zwei Würfel werden geworfen. Die Augenzahlen werden bei jedem Wurf addiert.

a) Für welche Summe erwartet ihr die größte Wahrscheinlichkeit?

b) Für welche Summe erwartet ihr die geringste Wahrscheinlichkeit?

c) Simuliere das Würfeln mit einem Tabellenkalkulationsprogramm, und „würfle“ damit mindestens 500-mal. Stelle dein Ergebnis in einem Diagramm dar.



Du kannst dazu folgende Funktionen nutzen:

= ZUFALLSZAHL(): Erzeugen einer Zahl zwischen 0 und 1.

= ZUFALLSZAHL()*6: Erzeugen einer Zahl zwischen 0 und 5.

A6: = GANZZAHL(ZUFALLSZAHL()*6)+1: Erzeugen von ganzen Zahlen zwischen 1 und 6.

F6: = ZÄHLENWENN(C6:C505;2): Berechnen der absoluten Häufigkeit der Summe 2.

= SUMME(F6:F17): Berechnen der gesamten Anzahl.

d) Berechne die Wahrscheinlichkeiten zu a) und b).

e) Vergleiche deine Ergebnisse von c) und d).

Lösungen

I.2 Übungen zum Mittelwert

a) Durchschnitt: 3,3

b) 1. durchschnittliches Taschengeld: 16,125 €

2. 4000 Jugendliche zusammen: 64500 €

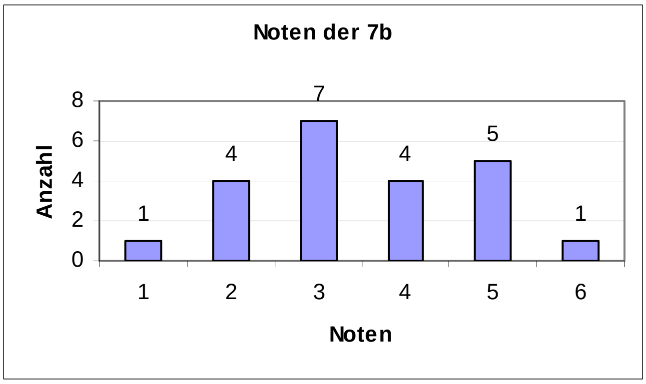
c) Andy: 4,536 m Boris: 4,626 m Chris: 4,456 Dany: 4,59 m

Es fahren Dany und Boris, wenn man nach dem Durchschnitt geht.

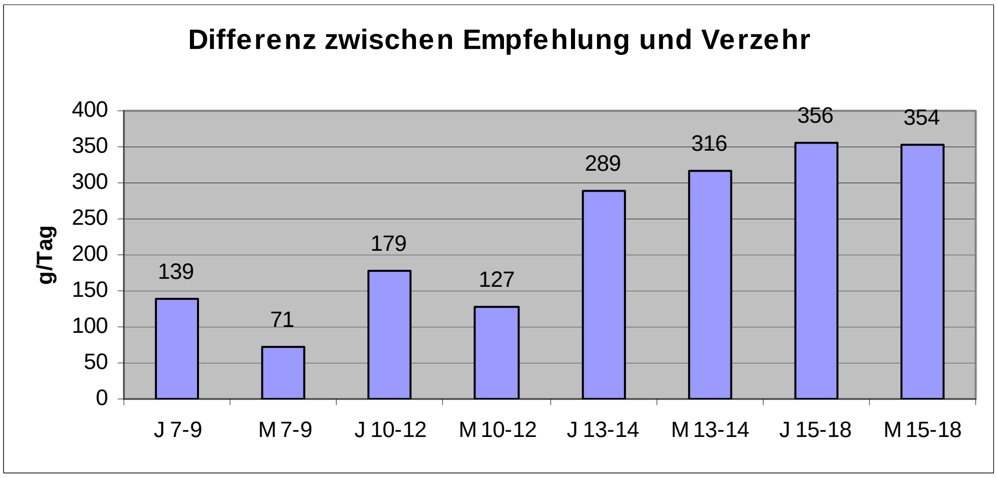
d) Denkbar wäre, dass ein Mädchen, z. B. Suse, vier sehr gute Sprünge und einen „Ausrutscher" hatte, der ihren Durchschnitt nach unten zieht. Sieht man von diesem einen Ausrutscher ab, versprechen Suses Ergebnisse die größte Chance auf einen Sieg bei der Meisterschaft. Die einzelnen Ergebnisse könnten vielleicht so aussehen:

	Jana	**Lisa**	**Suse**	**Lena**
	3,89 m	4,08 m	4,08 m	4,01 m
	3,80 m	3,77 m	4,05 m	3,87 m
	3,97 m	3,92 m	4,08 m	3,85 m
	4,07 m	4,00 m	3,42 m	3,97 m
	4,00 m	3,81 m	4,07 m	4,00 m
Durchschnitt	3,946 m	3,917 m	3,94 m	3,94 m

I.3 Häufigkeitsverteilungen: Notenspiegel



I.4 Säulendiagramm: Verzehr von Milch und Milchprodukten

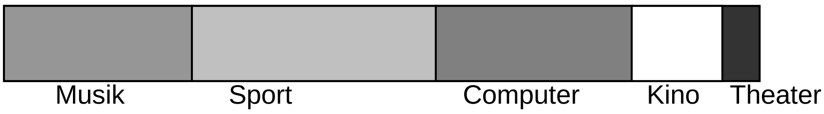


I.5 Kreisdiagramm: Umfrage

a) Diagramm C

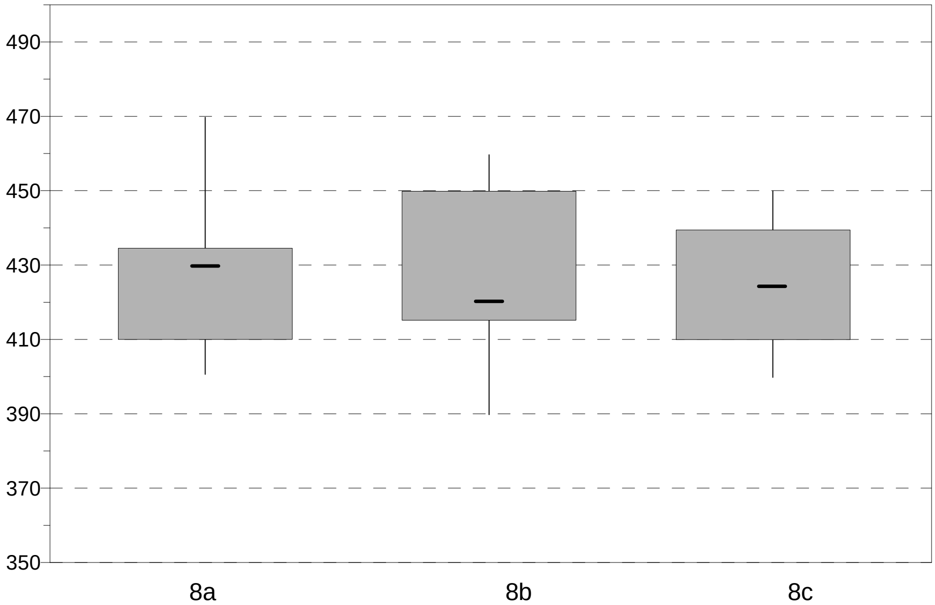
b)

	Musik	Sport	Computer	Kino	Theater
Absolute Häufigkeit	50	65	52	24	9
Relative Häufigkeit	0,25	0,325	0,26	0,12	0,045
Streifendiagramm cm	2,5	3,25	2,6	1,2	0,45



I.6 Boxplot: Klassenvergleich Weitsprung

	Mittelwert	Median	Spannweite	1. Quartil	3. Quartil
8a	426,4	430	400-470	410	435
8b	426,4	420	390-460	415	450
8c	425	425	400-450	410	440



I.7 Boxplot: Handykosten

a)

Altersgruppe	Minimum	Quartil 1	Median	Quartil 3	Maximum
20-29	5 €	15 €	35 €	45 €	60 €
30-39	5 €	25 €	35 €	40 €	55 €
40-49	0 €	10 €	25 €	30 €	50 €
50-59	0 €	5 €	10 €	20 €	50 €

b) Ja, das dürfte stimmen. Nur die 30- bis 39-Jährigen könnten ähnlich viel Geld ausgeben. Zwar haben die 20- bis 29-Jährigen die größte Spannweite, aber immerhin 50 % der Befragten gibt zwischen 35 € und 60 € aus – bei den 30- bis 39-Jährigen liegt diese Gruppe zwischen 35 € und 50 €..

c) Beispiele:

- 50 % aller 50- bis 59-Jährigen geben zwischen 5 € und 15 € aus.
- Die Altersgruppe 20–29 hat die größte Spannweite.
- 75 % der 40- bis 49-Jährigen geben bis zu 30 € aus.
- Ein Viertel der 30- bis 39-Jährigen gibt zwischen 35 € und 40 € aus.
- Bei der Altersgruppe der 20- bis 29-Jährigen schwanken die Ausgaben am stärksten.

III.1 Kugeln im Glas

A: p(w) = $\frac{3}{10} = 0{,}3$ B: p(w) = $\frac{2}{10} = 0{,}2$

C: p(w) = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$ D: p(w) = $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

a) Bei Gefäß C ist die größte Gewinnwahrscheinlichkeit.

b) 10 Kugeln insgesamt, z. B. 3 weiße, 4 schwarze, 3 graue Kugeln.

III.2 Chancen beim Würfeln

a) Würfel A: p(6) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$

b) Würfel A: p(<3) = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$ Würfel B: p(<3) = 0

Würfel C: p(<3) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}50$

Relative Häufigkeit des Zufallsexperimentes: $\frac{809}{1200} \approx 0{,}674$

⇒ Antwort: vermutlich Würfel A

c) Birgin sollte Würfel B wählen: Mit Würfel B ist die Wahrscheinlichkeit 66,6... %, dass sie die 2 des Würfels A übertrifft. Anna (mit Würfel A) dagegen gewinnt nur mit einer 6, die Wahrscheinlichkeit dafür ist nur 33,3... %.

III.3 Pferderennbahn

Lösungsstrategie: Stelle dazu in der Tabelle die Möglichkeiten dar, die unterschiedlichen Augensummen mit zwei verschiedenen Würfeln zu erreichen.

Hilfe:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, die jeweilige Augensumme zu werfen? Vergleiche die Wahrscheinlichkeiten, die verschiedenen Augensummen zu würfeln.

Augensumme	Möglichkeiten
2	1 Mögl. (1,1)
3	2 Mögl. (1,2);(2,1)
4	3 Mögl. (1,3);(2,2);(3,1)
5	4 Mögl. (1,4);(2,3);(3,2);(4,1)
6	5 Mögl. (1,5);(2,4);(3,3);(4,2);(5,1)
7	6 Mögl. (1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)
8	5 Mögl. (2,6);(3,5);(4,4);(5,3);(6,2)
9	4 Mögl. (3,6);(4,5);(5,4);(6,3)
10	3 Mögl. (4,6);(5,5);(6,4)
11	2 Mögl. (5,6);(6,5)
12	1 Mögl. (6,6)

Lösung: Der rote Reiter hat mit den Augensummen 5, 6, 7, 8 oder 9 eine Gewinnchance mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{24}{36} \approx 0{,}67$, der gelbe Reiter hat mit den Augensummen 2, 3, 4, 10, 11 oder 12 eine Gewinnchance mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{12}{36} \approx 0{,}33$.

IV. 1 Gefäß – Ziehen ohne Zurücklegen

a) p(blau, blau) $= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

b) p(rot, rot) $= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

c) p(rot, blau) + p (blau, rot) $= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

IV.2 Zwei Glücksräder

a) p(grau, grau) $= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12} \approx 0{,}42$

b) p(weiß, weiß) $= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

c) p(weiß, weiß) + p(weiß, grau) + p(grau, weiß) = $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6+12+10}{48} = \frac{28}{48} = \frac{7}{12} \approx 0{,}58$

IV.3 Zwillinge ziehen

p(Dame, Dame) $= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0,2$

p(Bube, Bube) $= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \approx 0,067$

Die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Spiel zu gewinnen, ist

p(Dame, Dame) + p(Bube, Bube) = 0,20 + 0,066... = 0,266... = 26,66... %

IV.4 „Differenz gewinnt“

Lösungsstrategie: Stelle in einer Tabelle alle Möglichkeiten zusammen, die verschiedenen Differenzen mit zwei Würfeln zu erhalten.

Differenz	Möglichkeiten	Anzahl	Wahrscheinlichkeit
0	(1/1), (2/2), …	6	$\frac{6}{36} = \frac{3}{18}$
1	(1/2), (2/1), (2/3), (3/2), …	10	$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$
2	(1/3), (3/1), (2/4), (4/2), …	8	$\frac{8}{36} = \frac{4}{18}$
3	(1/4), (4/1), (2/5), (5/2), …	6	$\frac{6}{36} = \frac{3}{18}$
4	(1/5), (5/1), (2/6), (6/2)	4	$\frac{4}{36} = \frac{2}{18}$
5	(1/6), (6/1)	2	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
		36	

Eine strategische Aufteilung der Kreise könnte also so aussehen:

0	1	2	3	4	5
O O O	O O O O O	O O O O	O O O	O O	O

V.1 Würfeln mit einem gezinkten Würfel

Die Wahrscheinlichkeiten werden über die relativen Häufigkeiten geschätzt.

Tabelle: Absolute Häufigkeiten

Augenzahl	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	10	11	16	14	17	32
B	18	16	17	15	18	16

Würfel A ist gezinkt.

VI.1 Geldfälscher

ist unter der Bedingung, dass der Automat blinkt.

c) Mithilfe einer sogenannten Vierfeldertafel kann man $P(F|B)$ berechnen. Stell dir vor, 100 000 Scheine laufen durch den Automaten. Davon sind etwa 200 Scheine gefälscht. Diese und andere Informationen kannst du in eine Tabelle eintragen.

Vierfeldertafel

Bei 89 820 echten Scheinen blinkt der Automat nicht.

	Schein gefälscht F	Schein echt E	
Automat blinkt B	190	9 980	10 170
Automat blinkt nicht $\overline{B}$	10	89 820	89 830
	200	99 800	100 000

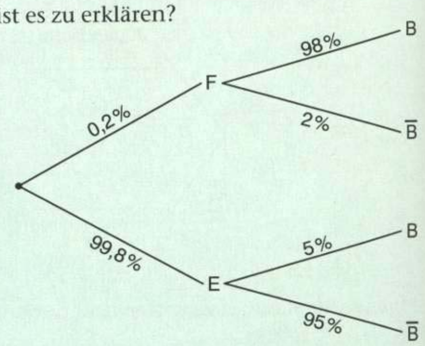
Gesamtzahl der gefälschten Scheine

Beschreibe mit Worten, was die Zahlen in den einzelnen Zellen bedeuten und wie sie zustande kommen.

$P(F|B) = \frac{190}{190+9980} \approx 0{,}019$

d) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird nun berechnet: In 10 170 Fällen blinkt der Automat, dabei ist nur in 190 Fällen ein gefälschter Schein der Auslöser, in 9 980 Fällen löst ein echter Schein einen Falschalarm aus. Das Blinken weist also nur mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 2 % auf Falschgeld hin.
Überrascht dich dieses Ergebnis? Wodurch ist es zu erklären?

e) Die Bank möchte das Verfahren verbessern. Dazu vergibt sie einen teuren Entwicklungsauftrag an ein renommiertes Ingenieurbüro. Diesem gelingt eine deutliche Verbesserung des Automaten: Er erkennt nun einen falschen Schein mit 98 % Sicherheit und bei einem echten Schein gibt er nur noch in 5 % der Fälle einen Fehlalarm. Verbessert sich die Wahrscheinlichkeit stark? Lohnt sich also die Investition?



Rechne mit der veränderten Vierfeldertafel.

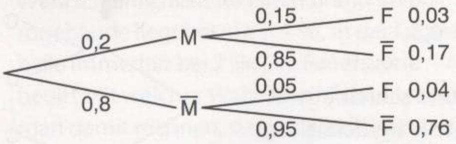
Quelle: Mathematik Neue Wege. Niedersachsen. 9. Schuljahr. Bildungshaus Schulbuchverlage 2007, S. 222 ff.

VI.2 „Montagsfahrräder“

Wenn man von einer zufälligen Auswahl bei Auslieferung der Fahrräder ausgeht, so lässt sich mit einem Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeit berechnen.

Merkmal A:
Das Fahrrad ist Montag montiert (M), das Fahrrad ist an einem der Wochentage Dienstag bis Freitag montiert ($\overline{M}$)

Merkmal B:
Das Fahrrad hat einen Montagefehler (F), das Fahrrad hat keinen Montagefehler ($\overline{F}$).



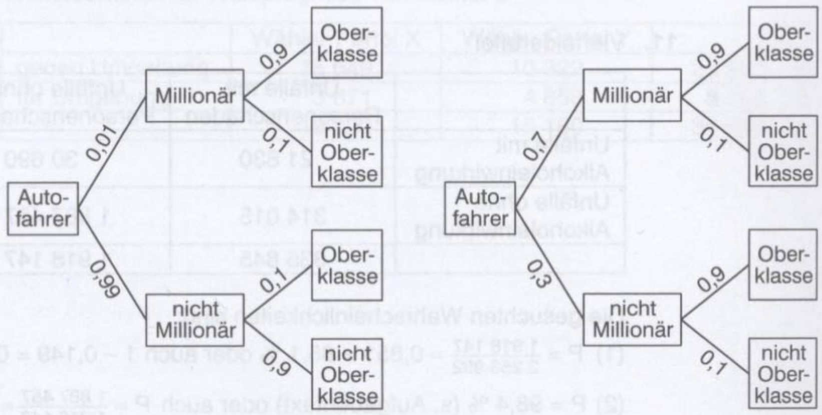
$P(M|F) = \frac{0{,}03}{0{,}03+0{,}04} \approx 0{,}43$

Das Fahrrad ist mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 43 % an einem Montag montiert worden.

VI.3 Der Schein kann trügen

Baumdiagramm

Fall A „1 % Millionäre“ Fall B „70 % Millionäre“



a) $P = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}9}{0{,}01 \cdot 0{,}9 + 0{,}99 \cdot 0{,}1} = \frac{0{,}009}{0{,}009 + 0{,}099} \approx 0{,}083 = 8{,}3\ \%$

b) $P = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}9}{0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}1} = \frac{0{,}63}{0{,}63 + 0{,}03} \approx 0{,}955 = 95{,}5\ \%$

Quelle: Mathematik Neue Wege. Niedersachsen. 9. Schuljahr. Bildungshaus Schulbuchverlage 2007, S. 222 ff.