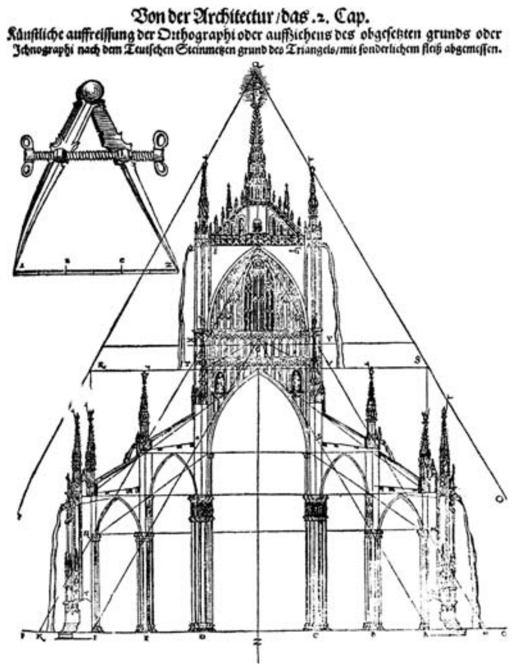
Von gotischen Fenstern, Steinmetzen und einer pfiffigen Idee

Die Architektur der Gotik hat sehr viel mit Geometrie zu tun. Das wird auf den ersten Blick klar, schaut man Bauten dieser Zeit nur genauer an.
Das nebenstehende Bild eines Schnittes durch den Mailänder Dom aus einem Buch von 1548 über Architektur macht das ganz deutlich. Hier sind es vor allem Dreiecke, die die Baukonstruktion bestimmen. Kannst du herausfinden, welche Bedeutung das in der linken oberen Ecke des Bildes befindliche Zeichengerät für die Konstruktion gehabt haben könnte?



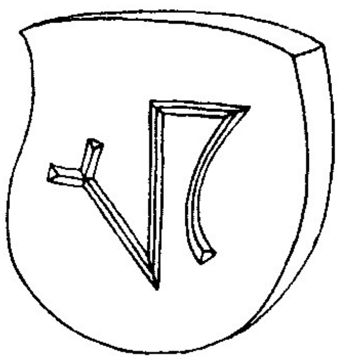
Hier ist Platz für deine Vorschläge:

Es handelt sich um einen ....

Er könnte benutzt worden sein, um ....
....
....

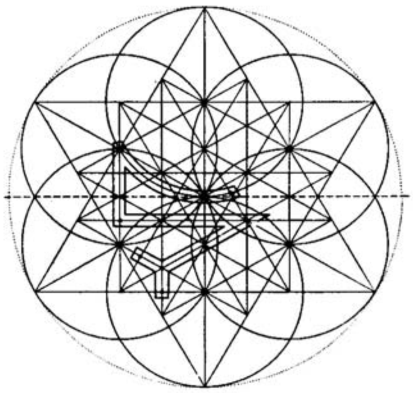
Es wird noch ein bisschen „mathematischer“, forscht man weiter:
Die Steinmetze, die die Kathedralen errichteten, waren in sogenannten Bauhütten organisiert. Die Lehrlinge, die in diesen Bauhütten ausgebildet wurden, erhielten insbesondere eine sorgfältige Anleitung in Geometrie und geometrischem Zeichnen.
Jeder Steinmetz hatte ein besonderes Zeichen, sein charakteristisches Kennzeichen, mit dem er die von ihm bearbeiteten Steine kennzeichnete.

Hier siehst du ein Beispiel für ein Steinmetzzeichen:



Steinmetzzeichen von A. Pilgram

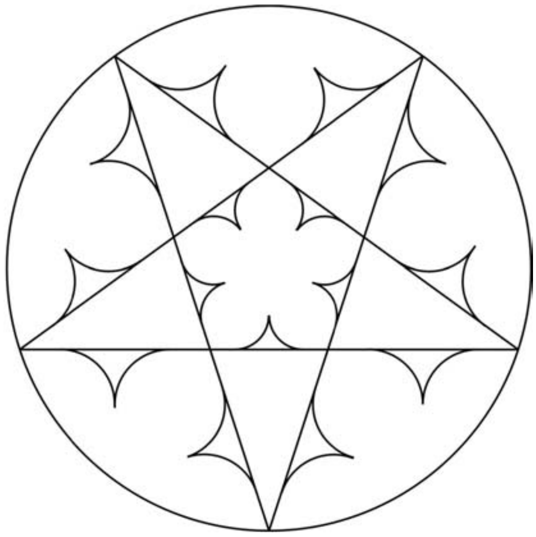
Nur mit Hilfe von Kreisen und Geraden wurden solche Kennzeichen konstruiert. Sollten sie in einen Stein gehauen werden, ging es darum, diese Konstruktion auf den Stein zu übertragen.



Steinmetzzeichen wurden aus einfachen Grundkonstruktionen Schritt für Schritt gewonnen – ähnlich, wie wir es etwa von Mandalas gewohnt sind. Kannst du erkennen, wie das Steinmetzzeichen aussah, das hier entstehen sollte? (Tipp: Schau dir die Mitte der Konstruktion ganz genau an. Nachzeichnen des Zeichens mit einem bunten Stift ist erlaubt.)

Doch nun wieder zu den gotischen Bauwerken selbst. Hast du schon einmal Ornamentrosetten von gotischen Kirchenfenstern oder -portalen genau angeschaut?
Im Kloster von Fribourg in der Schweiz (gebaut im 13. Jahrhundert) findet sich solch eine Rosette:

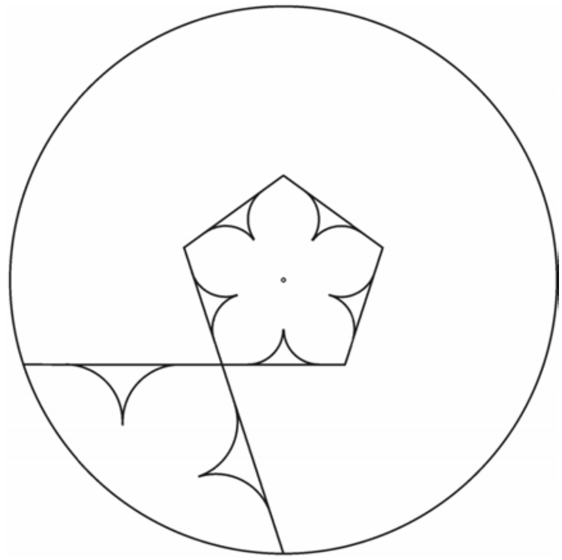
Auch hier wird bei genauerem Hinschauen klar: Zur Konstruktion der Rosette wurden nur Kreise bzw. Kreisbögen und Geraden benutzt:



Stündest du als Baumeister jener Zeit, in der das Kloster von Fribourg gebaut wurde, vor der Aufgabe, die Vorlage dieser Rosette für die ausführenden Steinmetze maßstabsgerecht zu zeichnen – wie würdest du vorgehen?

Richtig: Die Rosette besteht aus einem Mittelornament und fünf identischen Randornamenten. Sind die Mitte und ein Randornament gezeichnet, geht es nur noch darum, dieses Randornament viermal zu kopieren – und zwar jeweils um einen Winkel von 72° „weitergedreht“.

Hier ist der Konstruktionsanfang schon vorbereitet.



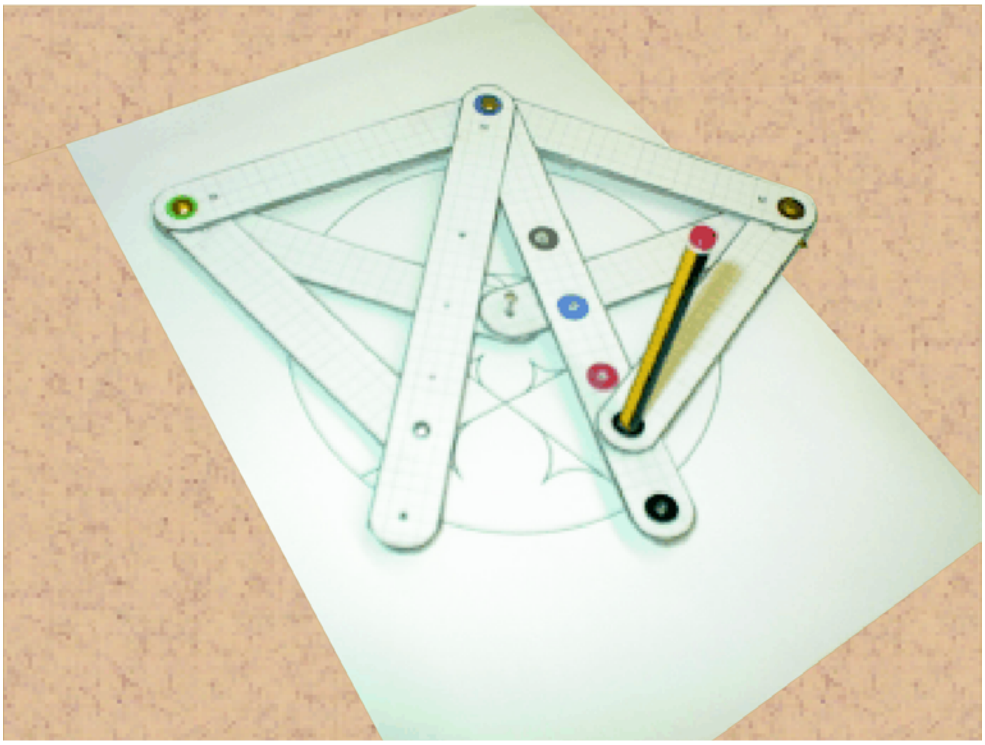
Interessant ist für uns nun die Erledigung der Kopieraufgabe. Und da sind wir ja eigentlich Spezialisten.

Aber halt: Unsere bisherigen Hilfsmittel zum Kopieren versagen hier ganz offensichtlich:

Mit dem Reduktionszirkel lassen sich zwar Längen abgreifen und in einem bestimmten Maßstab verändert wieder abtragen – nur eine Möglichkeit, dies ohne andere Hilfsmittel genau unter einem Winkel von 72° zu tun, haben wir dabei nicht.

Und wie sieht es mit dem Pantographen aus?
Erkennst du, wo hier das Problem liegt?
(Stichwort: Verschiebung) Hier ist Platz für deine Antwort:
....
....
....

Eine Abhilfe für unser Kopierproblem unter einem bestimmten Winkel liefert dieses Gerät:



Es handelt sich dabei um einen sogenannten Schiefpantographen, der von dem Mathematiker Sylvester entwickelt wurde.

Wenn man das Schiefpantographenmodell oben ganz genau anschaut, erkennt man, dass hier acht Stäbe beweglich miteinander verbunden sind:

> Vier der insgesamt sechs kurzen, aber gleichlangen, Stäbe bilden einen Rhombus,
>
> die übrigen vier Stäbe sind an drei der Rhombusecken befestigt.

Wie wir es vom einfachen Pantographen gewohnt sind, gibt es auch hier drei Stifte:

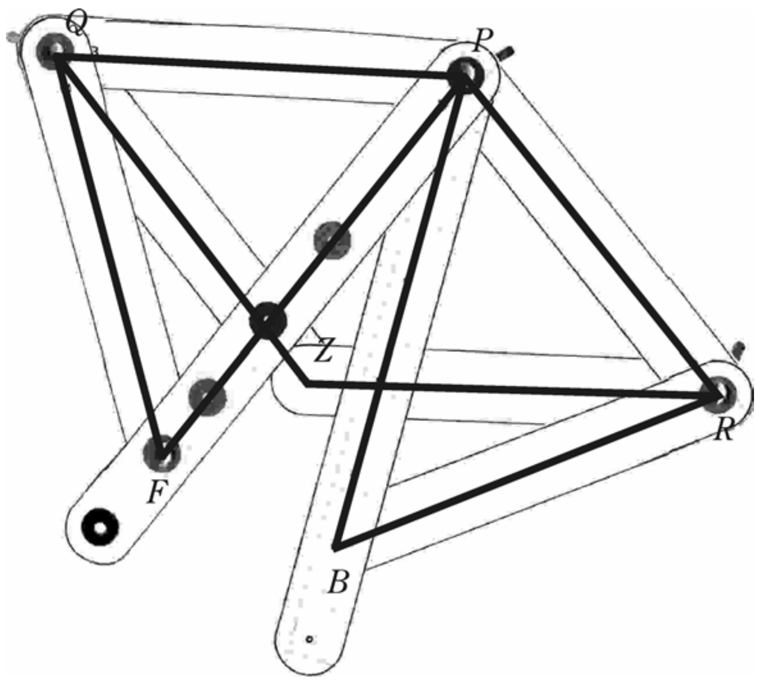
> den **Bleistift**, der die Kopie zeichnet, erkennt man auf den ersten Blick,
>
> in der freien Rhombusecke den **Fixierungsstift**, der im Drehpunkt, also unserem Kreismittelpunkt, angesetzt ist,
>
> und den **Führungsstift**, der über das zu kopierende Original fährt – hier nur als Punkt im langen Stab „gegenüber“ dem Bleistift erkennbar.

Der Ausklang des 19. Jahrhunderts war insbesondere auch auf wissenschaftlichem und technischem Gebiet durch eine stürmische Entwicklung gekennzeichnet. Fallen dir Beispiele dafür ein? Hier ist Platz zum Notieren:
1878 wird die Glühlampe erfunden,
1889 wird der Eiffelturm erbaut,
1896 wird das Radio erfunden,
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

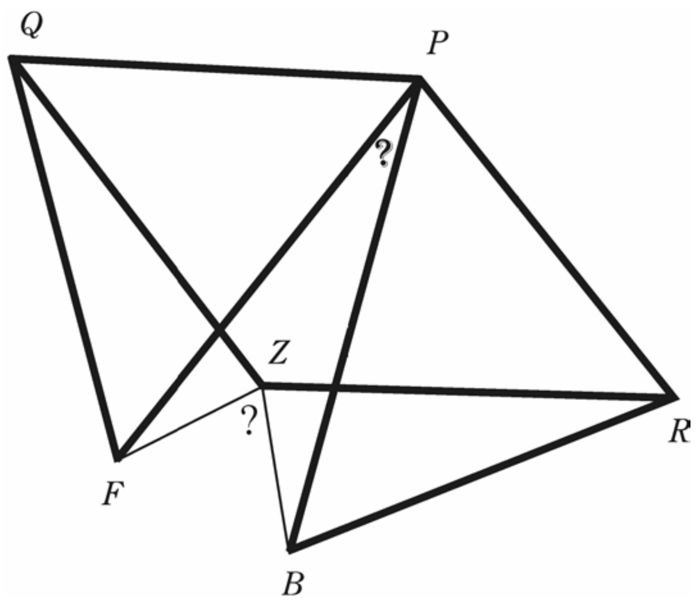
Ob diese Vorrichtung aber wirklich unsere Kopieraufgabe löst?

Ausprobieren ist eine Möglichkeit, um dies zu überprüfen. Auf den folgenden Seiten findest du eine Bastelanleitung für den Schiefpantographen und auch unsere Kopiervorlage. Es ist alles vorbereitet, um die Probe aufs Exempel zu machen.

Aber es ist auch nicht schwer zu verstehen, welche mathematische Idee hinter dem Schiefpantographen steckt:



Damit wir den mathematischen „Kern“ leichter herausfinden können, sind in der nachfolgenden Skizze die 8 Pantographenstäbe durch Strecken zwischen den Rhombusecken *Q*, *Z* (=fixierter Drehpunkt), *R* und *P* sowie den Punkten *F* (für den Führungsstift) und *B* (für den Bleistift) dargestellt.



Die Einstellung ist so vorgenommen, dass $\angle FQP$ und ebenso $\angle BRP$ gerade 72° (= 360°/5) betragen.

Uns interessiert der Drehwinkel unserer Kopie. Das heißt aber gerade, dass wir herausfinden müssen, wie groß $\angle FZB$ ist.

Am besten, du notierst einige der Winkelbeziehungen unserer geometrischen Figur:
(Hier ist ein Vorschlag in Form eines Lückentextes, wie du es aufnotieren könntest. Aber vielleicht findest du auch einen ganz anderen Weg, um zu zeigen, dass ? = ... *gilt .)*

1. *Für das Dreieck* FPQ *gilt: Es ist gleichschenklig und seine Basiswinkel betragen* ....
2. *Die Summe zweier benachbarter Winkel im Rhombus beträgt stets* ....

   Also gilt hier speziell:

   $(72° - \angle FQZ)$ + ... + ? + ... = ...
3. *Aus 2. ergibt sich unmittelbar:* ? = ...
4. *Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck* FQZ *betragen* ....
5. *Für den Vollwinkel bei* Z *erhält man also:*

   ? + ... + ... + ... = *360°*
6. *Daraus ist nun die Größe des Winkels* FZB *bestimmbar:*

   ? = ...

Apropos: Ähnlich, wie in unserem Fall für den Kopierwinkel 72°, kann man für jeden anderen Kopierwinkel vorgehen. Statt den Winkel FQP auf 72° einzustellen, braucht man nur .....
....

James Joseph Sylvester lebte von 1814 bis 1897. Er war ein sehr vielseitiger Mathematiker, der an verschiedenen bedeutenden Universitäten in England und in Amerika arbeitete. Seine Resultate zur Auflösung von Gleichungen, aber auch zur Kombinatorik oder zur Theorie von Matrizen und Determinanten haben die Mathematik vorangetrieben.

Ausgefallene und besondere Ideen waren für seinen Arbeitsstil charakteristisch. Sein Schiefpantograph zeigt das ganz deutlich: Er brauchte nur elementargeometrische, geeignet aneinandergereihte Überlegungen, um dieses leistungsfähige Zeichengerät zu entwickeln. Ganz schön pfiffig, oder?