Prof. Dr. Hans Schubert

Warum angewandte Mathematik?

Antrittsvorlesung Universität Rostock 1947

Der Zweijahrplan bedeutet für jeden Wissenschaftler der Ostzone, ganz gleich welche Fachwissenschaft er vertritt, die Aufforderung, sich zu überlegen, welche Ergebnisse seiner Wissenschaft zur Verbesserung der Lebensbedingungen unserer Bevölkerung beitragen könnten. Es ist daher durchaus verständlich, daß die wissenschaftlichen Institute der Universität Rostock und der anderen Hochschulen unserer Zone wohlüberlegte Vorschläge bei der deutschen Verwaltung für Volksbildung eingereicht haben. Wenn auch im Hinblick auf die dringendsten Bedürfnisse der Gegenwart von den zuständigen Stellen der Wirtschaftsplanung solche Vorschläge in den Vordergrund gerückt worden sind, die unmittelbar der Erhöhung der laufenden Produktion dienen, so ist damit keineswegs gesagt, daß z.B. die Geisteswissenschaften weniger wesentliche Beiträge zur Verbesserung unserer Lage liefern können als die Naturwissenschaft.

Wenn nämlich die schweren Fehler, die unser Volk ins Unglück gestürzt haben, in Zukunft vermieden werden sollen, darf sich der deutsche Wissenschaftler nicht mit der Rolle eines reinen Wahrheitssuchers zufrieden geben, dem es gleichgültig ist, wer seine Erkenntnisse verwertet. Vielmehr hat er gegenüber der menschlichen Gesellschaft die Pflicht, darüber zu wachen, daß die Ergebnisse seiner Wissenschaft der friedlichen Weiterentwicklung und nicht der Zerstörung unserer Daseinsgrundlage dienen.

Diese Aufgabe ist so groß und so verantwortungsvoll, daß sie keineswegs einigen wenigen Fachwissenschaften überlassen werden kann, sondern von der ganzen Wissenschaft in Angriff genommen werden muß, „Denn“- so sagte der große Physiker Max Planck[1] - „die Wissenschaft bildet nun einmal sachlich genommen eine innerlich geschlossene Einheit. Ihre Trennung nach verschiedenen Fächern ist ja nicht in der Natur der Sache begründet, sondern entspringt nur der Begrenztheit menschlichen Fassungsvermögens, welche zwangsläufig zu einer Arbeitsteilung führt.“

Die Idee der gemeinsamen Verantwortlichkeit der Wissenschaft für die praktischen Folgen ihrer Ergebnisse enthält eine Reihe bedeutsamer Forderungen an die Intelligenz unseres Volkes, die bereits in den einleitenden Sätzen zur D.V.K.-Verordnung über Wissenschaft und Kultur[2] zum Ausdruck gebracht worden sind. Darüber hinaus ist es unbedingt nötig, das gegenseitige Verständnis der Einzelwissenschaften, durch Vorträge, Diskussionen und gemeinverständliche Darstellungen einzelner Wissensgebiete zu fördern und auf diese Weise Brücken zur werktätigen Bevölkerung zu schlagen.

Auf den Einwand hin, daß durch sogenannte populäre Darstellungen der betr. Fachwissenschaft mehr Schaden als Nutzen zugefügt wird, möchte ich erwidern, daß ein günstiger Erfolg ausschließlich von der Art der Darstellung und dem Verantwortungsbewußtsein des Verfassers abhängt.

[1] Vgl. M. Planck 1933, S.243

[2] gemeint ist eine Anordnung der sowjetischen Militärverwaltung

So hat es z.B. die Astronomie durch wirklich gute populäre Darstellungen verstanden, in weiten Kreisen der Bevölkerung Freunde für ihre wahrlich „fernliegenden" Forschungsgegenstände zu werben.
Im Sinne dieser Ausführungen möchte ich versuchen, an Hand von einfachen Beispielen einen Einblick in die Problemstellungen und Methoden der angewandten Mathematik zu geben, wobei es sich nicht vermeiden läßt, auch einige Streiflichter auf die Arbeitsweise der reinen Mathematik zu werfen.

Wenn ein Außenstehender die Begriffe „reine Mathematik" und „angewandte Mathematik" hört, so wird er zunächst glauben, daß damit eine Einteilung der in der gesamten Mathematik behandelten Probleme in folgender Weise vorgenommen wird:
Alle Problemstellungen, die im Reiche der Zahlen und Formen selbst entstanden sind, werden der reinen Mathematik zugewiesen, dagegen alle Problemstellungen, die ihre Entstehung den Naturwissenschaften und der Technik verdanken, der angewandten Mathematik.
Daß diese Einteilung nicht das Wesen der Sache trifft, wollen wir an Hand von zwei beliebig herausgegriffenen Beispielen zeigen.

Schon zur Zeit Albrecht Dürers war es notwendig geworden, die Ausbildung in der Malerei durch eine eingehende Behandlung der Zentralprojektion zu ergänzen. Man wollte ein Bild von der Landschaft entwerfen, das dem an passender Stelle stehenden Beschauer denselben Eindruck von der Tiefenwirkung des Raumes vermittelt, wie ihn das Auge des Malers selbst wahrgenommen hat. Ferner enstand am Anfang des 17. Jahrhunderts durch Keplers Bestimmung der Planetenbahnen das Bedürfnis, den Zusammenhang der verschiedenen Kegelschnitte durch umfassende Anwendung der Zentralprojektion herzustellen, was der französische Geometer Desargues 1636 in seiner Lehre von der Perspektive zur Ausführung brachte. Schließlich wurde durch den Geometer Monge in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts eine kleine Schar sorgfältig ausgewählter Militärschüler in der École polytechnique mit den Elementen der darstellenden Geometrie vertraut gemacht, die sie zum Entwurf von Festungsbauten und anderen Konstruktionsaufgaben benötigten. Monges bedeutendster Schüler Poncelet hat dann ausgehend von der Zentralprojektion die Gesetze des Projizierens und Schneidens zu einem einheitlichen System zusammengefaßt.

Während sich bisher die Entwicklung der synthetischen Geometrie in engem Anschluß an praktische Aufgaben der oben genannten Art vollzog, erfuhr sie durch Poncelet eine entscheidende Wendung. Mit dem Dualitätsgesetz und dem Kontinuitätsprinzip schuf der französische Meister eine neue Art geometrischer Anschauung, die sich etwa folgendermaßen kennzeichnen läßt:
Statt wie bisher nach der Verzerrung der einzelnen Strecken, Winkel und Flächen zu fragen, die mit der Projektion einer räumlichen Figur auf eine Ebene notwendig verbunden sind, stellte er die entgegengesetzte Frage nach denjenigen Eigenschaften einer Figur, die bei einer beliebigen Zentralprojektion ungeändert bleiben. Zugleich wurden durch Einführung der uneigentlichen oder unendlich fernen Elemente die vielen lästigen Fallunterscheidungen in der Beweisführung vermieden, die in der Elementargeometrie durch das Parallelenaxiom bedingt sind.

Nachdem der Schweizer Bauernsohn Steiner, übrigens ein Schüler von Pestalozzi, in seinem mit mustergültiger Klarheit geschriebenen Hauptwerk „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander“ alle höheren Gebilde der projektiven Geometrie aus einigen Grundgebilden erzeugen konnte, hat der deutsche Geometer v. Staudt diese Entwicklung zum Abschluß gebracht, indem er in seiner „Geometrie der Lage“ die einzige Maßbestimmung der projektiven Geometrie, das sogenannte Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden, durch eine elegante Konstruktionsvorschrift ersetzte. Mit dieser von allen Maßbestimmungen unabhängigen Begründung der projektiven Geometrie hat v. Staudt ein völlig in sich geschlossenes Gedankengebäude von großer Kühnheit errichtet, das ein wesentlich einfacheres Axiomensystem als Fundament besitzt wie die Elementargeometrie. Aber er hat damit sein System von allen Bindungen gelöst, die die ersten Aufgaben der projektiven Geometrie zur Malerei, zur Astronomie und zur Technik in Beziehung setzten. Diese Abkehr von ursprünglich vorliegenden Bedürfnissen des praktischen Lebens ist geradezu typisch für viele Problemstellungen der reinen Mathematik.

Als ein weiteres Beispiel hierzu sei noch das Problem von Platau angeführt, das sich an folgendes bekannte Experiment anschließt:
Taucht man einen geschlossenen Drahtbügel in eine Seifenlösung ein, so besitzt die in diesem Drahtbügel eingespannte Seifenhaut den kleinsten Flächeninhalt im Vergleich mit jeder anderen Fläche, die sich in die durch den Drahtbügel bestimmte Raumkurve einspannen läßt.
Zur Ermittlung dieser Minimalflächen hat sich eine reizvolle Theorie entwickelt, die mit den Namen Enneper, Weierstraß, Riemann, Schwarz, Lie, Ribaucour und Platau verknüpft ist. Sie wurde in der Zeit von 1932 bis 1936 durch Douglas, Rado und Courant dadurch zu einem gewissen Abschluß gebracht, daß diese drei Forscher unabhängig voneinander gewisse unendliche Prozesse angeben konnten, die sich ohne Ende der gesuchten Minimalfläche nähern. Da jedoch weder über die Rechenfähigkeit der einzelnen Näherungen noch über die Konvergenzgüte der unendlichen Prozesse konkrete Angaben vorliegen, geht das Ergebnis jener Untersuchungen nicht wesentlich über einen reinen Existenzbeweis für die Lösung des dem Seifenhautexperiment entsprechenden mathematischen Problems hinaus. Der Physiker muß aber von einer mathematischen Theorie mindestens verlangen, daß sie ihm gestattet, den Ausgang künftiger Experimente richtig vorauszuberechnen, denn nur so kann sie als Grundlage technischer Anwendungen dienen.

Trotzdem möchte ich davor warnen, diese Forderung zum Anlaß zu nehmen, um den Erkenntniswert mathematischer Existenzbeweise so zu unterschätzen, wie es gewisse Naturwissenschaftler und Ingenieure manchmal tun, und möchte im engen Rahmen dieser Vorlesung wenigstens auf einige Gesichtspunkte zu dieser wichtigen Frage hinweisen.
Wie der Freiburger Mathematiker L. Heffter treffend bemerkt, darf man z.B. die Axiome der Geometrie als eine mögliche Art Idealisierung von Erfahrungstatsachen auffassen[3]. Vom Standpunkt der Anwendungen aus möchte ich über die Heffter-

[3] Vgl. L. Heffter 1921, S.3

sche Meinung noch ein wenig hinausgehen und die Axiome der Geometrie nicht nur als eine mögliche sondern als eine zweckmäßige Art Idealisierung von Erfahrungstatsachen und dementsprechend die geometrischen Grundbegriffe als zweckmäßig idealisierte Modelle von gewissen Gegenständen der Außenwelt auffassen. So kann man z.B. die Strecke als ein idealisiertes Modell des gespannten Fadens und die Axiome der Kongruenz als idealisierte Form von Erfahrungen betrachten, die bei der Bewegung starrer Körper gesammelt wurden.
Über den Zusammenhang des Zahlbegriffs mit der Erfahrung sagt O. Hölder[4] in seiner Schrift „Die Arithmetik in strenger Begründung“ u.a. „Die Lehre von den gebrochenen Zahlen wäre sicherlich ohne das Vorhandensein von ausgedehnten Größen, die sich teilen lassen, gar nicht entwickelt worden. Auf solchen anschaulichen oder erfahrungsmäßigen Tatsachen -...- läßt sich auch eine strenge Begründung der Bruchlehre aufbauen, wenn man solche Tatsachen in genau bestimmter Form postulieren, also gewissermaßen als Axiome ansehen will“. Er zeigt dann, daß es nicht genügt, die natürlichen Zahlen nur als Stellenzeichen aufzufassen, wenn man die Tatsache erklären will, daß man bei der Abzählung einer endlichen Menge immer dasselbe Stellenzeichen als Nummer des letzten Elements erhält, ganz gleich in welcher Reihenfolge die Abzählung vorgenommen wird. Unter der Anzahl 3 hat man dann den Typus aller Mengen von irgendwelchen Gegenständen zu verstehen, deren Elemente sich umkehrbar eindeutig den Zeichen 1, 2, 3 zuordnen lassen. Natürlich können an Stelle der Ziffern 1, 2, 3 auch andere geeignete Symbole verwendet werden.
Da ja nach der Zielsetzung eines physikalischen oder technischen Problems verschiedene Idealisierungsmöglichkeiten bestehen, erscheint die Frage durchaus berechtigt, ob als Ergebnis der speziell vorgenommenen Idealisierung ein mathematisches Problem entstanden ist, dessen Voraussetzungen miteinander im Einklang stehen, oder ein Problem mit widersprechenden Voraussetzungen herausgekommen ist. Als ein Beispiel für verschiedene Idealisierungsmöglichkeiten sei hier lediglich angeführt, daß bei der Bahnbestimmung der Planeten diese als Massenpunkte angenommen werden, während die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne nur berechnet werden kann, wenn die Gestalt der Erde etwa als Kugel oder als Rotationsellipsoid vorausgesetzt wird.

Um jedes Mißverständnis zu vermeiden, sei ausdrücklich betont, daß ein mathematischer Existenzbeweis, der im Anschluß an ein physikalisches oder technisches Problem geführt wird, nur eine Aussage über das mathematische Bild dieses Problems liefert, keinesfalls aber eine Aussage über die Realisierungsmöglichkeit des zugrundeliegenden Vorganges machen kann. Vielmehr muß man auch bei der theoretischen Behandlung naturwissenschaftlicher Probleme gewisse Voraussetzungen über die Natur und die Stellung des Forschers zur Natur machen, die der große Physiker Max Planck[5] mit folgenden Worten kennzeichnet: „Die beiden Sätze: „Es gibt eine reale, von uns unabhängige Außenwelt“, und: „Die reale Außenwelt ist nicht unmittelbar erkennbar“, bilden zusammen den Angelpunkt der ganzen physikalischen Wissenschaft.“ „Dem Physiker ist das ideale Ziel die Erkenntnis der

[4]Vgl. O. Hölder 1929, S. 2
[5]Vgl. M. Planck 1930, S. 207 und 208

realen Außenwelt; aber seine einzigen Forschungsmittel, seine Messungen, sagen ihm niemals etwas direkt über die reale Welt, sondern sind ihm nur eine gewisse mehr oder weniger unsichere Botschaft oder, wie es Helmholtz einmal ausgedrückt hat, ein Zeichen, das die reale Welt ihm übermittelt und aus dem er dann Schlüsse zu ziehen sucht, ähnlich einem Sprachforscher, welcher eine Urkunde zu enträtseln hat, die aus einer ihm gänzlich unbekannten Kultur stammt. Was er dabei von vorn herein voraussetzt und voraussetzen muß, wenn seiner Arbeit überhaupt ein Erfolg möglich sein soll, ist, daß der Urkunde ein vernünftiger Sinn innewohnt. So muß auch der Physiker voraussetzen, daß die reale Welt gewissen uns unbegreiflichen Gesetzen gehorcht, wenn er auch keine Aussicht hat, diese Gesetze vollständig zu erfassen oder auch nur ihre Natur von vornherein mit voller Sicherheit festzustellen.“ „Im Vertrauen auf die Gesetzlichkeit der realen Welt formt er sich nun ein System von Begriffen und Sätzen,..., welches er nach bestem Wissen und Können so ausstattet, daß es an die Stelle der realen Welt gesetzt, ihm möglichst die nämlichen Botschaften zusendet als diese.“

Nehmen wir nun an, daß die Existenzfrage eines mathematischen Problems im günstigen Sinne geklärt sei, so braucht das keineswegs zu bedeuten, daß damit eine tiefere Einsicht in die Struktur der Lösung gewonnen ist, die uns Anhaltspunkte für ein praktisch brauchbares Konstruktionsverfahren geben könnte. Zwei einfache Beispiele aus der reinen Mathematik mögen diesen Sachverhalt erläutern: Denken wir uns die Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... gegeben, so besagt ein bekannter Satz von Euklid[6], daß es in dieser Folge unendlich viele Primzahlen gibt, d.h., Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. Ferner läßt sich jede natürliche Zahl auf eine und nur eine Weise als Produkt von Primzahlen darstellen, abgesehen natürlich von der Reihenfolge der Faktoren. So ist z.B. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Die Existenz von unendlich vielen Primzahlen hat Euklid bekanntlich folgendermaßen bewiesen. Er ging aus von der gegenteiligen Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen 1, 2, 3, 5, ..., p. Nunmehr bildet er die natürliche Zahl $N = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p) + 1$. Da diese Zahl durch jede der vorhandenen Primzahlen geteilt den Rest 1 läßt, muß sie entweder eine Primzahl sein, die größer als p wäre, oder durch eine Primzahl teilbar sein, die unter den Primzahlen 1, 2, 3, 5, ..., p nicht vorkommt. Beide Folgerungen widersprechen der Annahme; sie ist daher falsch.

Typisch für diese indirekte Schlußweise ist der Umstand, daß die Existenz von unendlich vielen Primzahlen aus der Annahme des Gegenteils gefolgert werden kann, ohne daß ein Verfahren zur Auffindung der Primzahlen bekannt zu sein braucht.

Ein weiteres Beispiel dieser Art liefert der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra. Er besagt: Jede algebraische Gleichung

$$x^n + a_1 n^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n = 0,$$

deren Koeffizienten a_1, a_2, ..., a_n beliebige komplexe Zahlen sind, und deren Grad n größer als Null ist, hat mindestens eine komplexe Zahl x als Lösung. So hat z.B. die kubische Gleichung $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$ die Lösungen $x_1 = 2$, $x_2 = 1 + i$,

[6] Vgl. Euklid's Elemente, 9. Buch, 20. Satz, in C. Dippe 1840, S. 112

$x_3 = 1 - i$, wie man aus der Linearfaktordarstellung

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = (x-2)(x-1-i)(x-1+i)$$

unmittelbar erkennt.
Für den Fundamentalsatz der Algebra, der seinem Wesen nach mehr in die Funktionentheorie als in die Algebra gehört, sind mehrere völlig verschiedene Beweise gegeben worden - allein drei von Gauß - aber keiner von ihnen enthält ein praktisch brauchbares Verfahren zur Herstellung der Lösung.
Obwohl mit diesem Satz ein gewisser Abschluß in der Entwicklung des Zahlbegriffs erreicht ist, so wird doch durch die Art der Beweisführung das für die Integration der rationalen Funktionen wesentliche Problem offengelassen:

Wie kann man die sämtlichen Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit vorgeschriebener Genauigkeit wirklich berechnen?

Natürlich wäre es verfehlt, aus diesen zwei Beispielen etwa schließen zu wollen, daß das Wesen der reinen Mathematik sich darin erschöpft, Existenz und Eigenschaften von Zahlen und Figuren nachzuweisen, ohne sich überhaupt darum zu kümmern, wie man diese Zahlen und Figuren wirklich herstellen kann. Sowohl in der alten wie in der neuen Mathematik gibt es zahlreiche Beispiele dafür, in welchen die Existenz einer Zahl oder einer Funktion oder eines geometrischen Gebildes mit vorgeschriebenen Eigenschaften durch Angabe eines Herstellungsverfahrens sichergestellt wird.
So läßt sich z.B. in der Trigonometrie ein Dreieck aus drei passend gewählten Stücken berechnen. Für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser hat bereits Archimedes das bekannte Konstruktionsverfahren mit Hilfe der regelmäßigen ein- und umbeschriebenen Vielecke ersonnen, und für π den Näherungswert $\frac{22}{7}$ angegeben, während Leibniz zur Berechnung der Zahl π aus der bekannten Potenzreihenentwicklung

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots \qquad \text{für} \quad x = 1 \tag{1}$$

die besonders einfach gebaute Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \ldots \tag{2}$$

gefunden hat. Leider ist sie für die praktische Berechnung der Zahl π fast völlig wertlos, denn man müßte mehr als 10^6 Stammbrüche berechnen, um 6 Dezimalen von π sicherzustellen.
Diese Schwierigkeit beruht darauf, daß zur Herstellung der Zahl π ein unendlicher Prozeß benutzt wird, der zwar ein bestimmtes Ziel besitzt, sich diesem Ziel aber viel zu langsam nähert. Zugleich zeigt dieses Beispiel, daß man aus der einfachen Struktur des Bildungsgesetzes eines unendlichen Prozesses zwar leicht erkennen kann, ob er überhaupt einem bestimmten Grenzwert zustrebt, aber keineswegs daraus schließen darf, daß er auch ein einfaches Näherungsverfahren zur Berechnung dieses Grenzwertes darstellt.
Da bei den unendlichen Prozessen der Mathematik die Güte der Annäherung durch

das Bildungsgesetz vollkommen mitbestimmt ist, läßt sich die Verbesserung der Konvergenzgüte nur auf dem Wege über ein neues Bildungsgesetz erreichen, was auf die Entwicklung einer völlig neuen Lösungsmethode für die ursprünglich gestellte Aufgabe hinausläuft.

Da Schwierigkeiten der bisher geschilderten Art bei der praktischen Lösung mathematischer Aufgaben leider sehr häufig auftreten und der erfolgreichen theoretischen Behandlung physikalischer und technischer Probleme im Wege stehen, sahen sich eine Reihe bekannter Mathematiker wie Gauß, Bruns, Klein, Runge, Trefftz u.a. genötigt, die reine Mathematik durch eine Forschungsrichtung zu ergänzen, die sich der Überwindung jener Schwierigkeiten mit allen zu Gebote stehenden Mitteln widmet. Die Zielsetzung und Arbeitsweise dieser Forschungsrichtung hat C. Runge in seinem Büchlein „Graphische Methoden“ so trefflich umrissen, daß ich sie wörtlich wiedergeben möchte. Runge sagt u.a.[7]: „Die Lösung vieler, wenn nicht aller mathematischen Probleme besteht in dem Ermitteln der Werte unbekannter Größen, die gewissen gegebenen Bedingungen genügen. Sie zerfällt in verschiedene Schritte, deren erster die Untersuchung ist, ob die gesuchten Größen wirklich existieren, so daß es möglich ist, den gegebenen Bedingungen zu genügen oder nicht. Ist der Beweis der Unmöglichkeit erbracht, so ist man mit dem Problem fertig. Man nehme z.B. die berühmte Frage nach der Quadratur des Zirkels. Wir können sie formulieren als die Frage nach ganzzahligen Koeffizienten einer algebraischen Gleichung, deren eine Wurzel π ist. Vor dreißig Jahren zeigte Lindemann, daß ganze Zahlen, die diesen Bedingungen genügen, nicht existieren, und damit war ein Problem erledigt, das beinahe so alt ist wie die Geschichte der Menschheit.“
„In vielen Fällen kann der erste Schritt zur Lösung so wenig Schwierigkeiten bieten, daß man sofort zu dem zweiten, dem Aufsuchen der Methode zur Berechnung der gesuchten unbekannten Größen, übergehen kann. Oder es kann, selbst wenn der erste Schritt nicht so leicht ist, zweckmäßig sein, mit dem zu zweit genannten anzufangen, denn wenn es gelingt, Berechnungsmöglichkeiten zu finden, welche die unbekannten Größen bestimmen, so ist der Beweis ihrer Existenz ja einbegriffen. Gelingt es aber nicht, so ist es immer noch Zeit, zu erstgenannten Schritt zurückzukehren.“
„Eine nicht geringe Zahl von Leuten meint, daß hiermit die Aufgabe des Mathematikers erschöpft sei. Dies beruht, glaube ich, auf der Tatsache, daß der reine Mathematiker nicht gewohnt ist, seine Untersuchungen auf die Wirklichkeit auszudehnen. Das überläßt er dem Astronomen, dem Physiker, dem Ingenieur. Diese wiederum interessieren sich hauptsächlich für die wirklichen numerischen Werte, die sich aus den mathematischen Rechnungen ergeben. Sie sind gezwungen, die Berechnungen auszuführen, und indem sie dies tun, werden sie vor die Frage gestellt, ob sich dasselbe Ergebnis nicht auf kürzerem Wege oder mit geringerer Mühe erreichen ließe. Gesetzt der Mathematiker gibt ihnen eine zwar vollkommen scharfe und logische Methode an, die aber 200 Jahre unausgesetzter Rechenarbeit zu ihrer Durchführung erfordert, so wären sie wohl berechtigt, dies für wenig besser als nichts anzusehen. So ergibt sich also ein dritter Schritt zur vollständigen Lösung eines mathematischen Problems, nämlich der, diejenige Methode zu finden, die mit dem geringsten Aufwand von Zeit und Mühe zur Lösung führt.

[7]Vgl. C. Runge 1915, S. 1 und 2

Ich behaupte, daß dieser Schritt gerade so gut ein Kapitel der Mathematik bildet wie die beiden ersten und daß es nicht angeht, ihn den Astronomen, Physikern, Ingenieuren und wer sonst noch mathematische Methoden anwendet, zu überlassen, weil diese Leute ihr Augenmerk nur auf die Ergebnisse richten, und daher geneigt sind, die Verallgemeinerung der von ihnen etwa ersonnenen Methoden zu vernachlässigen, wogegen in der Hand des Mathematikers die Methoden von einem höheren Gesichtspunkt aus entwickelt werden und die Frage nach ihrer Anwendbarkeit auf andere Probleme, auf solche anderer Gebiete wissenschaftlicher Forschung, gehörige Berücksichtigung findet."
„Bei dem heutigen Zustand der Dinge sind die Methoden des Ingenieurs und des Feldmessers in vielen Fällen dem Astronomen und Physiker ganz unbekannt und umgekehrt, obgleich die Probleme, mit denen beide Gruppen es zu tun haben, mathematisch beinahe identisch sein können."

Obwohl diese Ausführungen von Runge über 30 Jahre alt sind, ist ihre Bedeutung heutzutage noch genau so groß wie damals. C. Runge fordert darin kurz gesagt, daß für die Lösung von Problemen, die praktischen Bedürfnissen der menschlichen Gesellschaft entsprungen sind, Methoden entwickelt werden müssen, die von vornherein die Grenzen menschlicher Leistungsfähigkeit bei der wirklichen Herstellung der Lösung berücksichtigen. Daß diese Forderung notwendig ist, geht aus der oben geschilderten Arbeitsweise der reinen Mathematik zur Genüge hervor, daß sie innerhalb gewisser Grenzen erfüllbar ist, sollen folgende Beispiele zeigen.

Beispiel 1 *Wählt man in der Potenzreihenentwicklung (1) der Funktion* $y = \arctan x$ *das Argument* $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$*, so liefert sie an Stelle der Leibnizschen Reihe (2) die wesentlich rascher konvergente Reihe*

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + - \ldots\right]. \tag{3}$$

Noch besser konvergiert die durch Kombination von zwei speziellen arctan*−Reihen hergestellte Entwicklung*

$$\begin{aligned}\pi \;=\; & 16\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + - \ldots\right] - \\ & 4\left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + - \ldots\right].\end{aligned} \tag{4}$$

Durch Berechnung der ersten vier Teilsummen der Reihen (2) bis (4) ergeben sich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Näherungswerte s_1, s_2, s_3, s_4, *während* s *die Reihensumme bis auf 7 Dezimalen darstellt.*

Reihe	s_1	s_2	s_3	s_4	s
(2)	*1,000 0000*	*0,666 6667*	*0,866 6667*	*0,723 8096*	*0,785 3982*
(3)	*0,579 0169*	*0,514 8669*	*0,526 0302*	*0,522 9755*	*0,523 5988*
(4)	*3,183 2636*	*3,140 5968*	*3,141 6208*	*3,141 5920*	*3,141 5928*

[Teilsummen und Summe der Reihen (2) bis (4).]

Man erkennt hieraus, daß man bereits mit der vierten Teilsumme der Reihe (4) eine Annäherung bis auf 6 Dezimalen an den wahren Wert von π erreicht, während in der Reihe (2) noch nicht einmal die millionste Teilsumme einen Näherungswert von gleicher Güte liefern würde.

Beispiel 2 *Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse bei der Berechnung der natürlichen Logarithmen, die mit der Bestimmung des Wertes von $\ln 2$ beginnt. Für die Bestimmung des Wertes von $\ln 2$ erhält man aus der bekannten Potenzreihenentwicklung der Fkt. $\ln(1+x)$ mit Hilfe des Abelschen Grenzwertsatzes*

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots \tag{5}$$

und aus der Potenzreihenentwicklung der Funktion $\ln \frac{1+x}{1-x}$, indem man $x = \frac{1}{3}$ wählt,

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \ldots\right]. \tag{6}$$

Während die Reihe (5) wegen ihrer viel zu langsamen Konvergenz für die Berechnung von $\ln 2$ völlig ungeeignet ist, liefert die 7. Teilsumme der Reihe (6), wenn man jedes Glied bis auf 9 Dezimalen bestimmt, den Wert

$$\ln 2 = 0,6931471$$

mit 7 gesicherten Dezimalen. Aus der für $p = 2, 3, 5, 7, \ldots$ sehr gut konvergenten Reihenentwicklung

$$\ln(p+1) = \ln p + 2\left[\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{3(2p+1)^3} + \frac{1}{5(2p+1)^5} + \ldots\right] \tag{7}$$

kann man dann die natürlichen Logarithmen der auf 2 folgenden Primzahlen 3, 5, 7,... bestimmen. Außerdem stehen für diesen Zweck noch besser konvergente Reihenentwicklungen zur Verfügung. Durch Multiplikation mit dem Modul $M = 0,4342948\ldots$ des Briggschen Systems erhält man schließlich die üblichen Logarithmen zur Basis 10.

Beispiel 3 *Die Auflösung von Systemen von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten gehört zu den lästigsten Tagesaufgaben der Statiker, Feldmesser und Astronomen und geschieht in der Regel mit Hilfe der Rechenmaschine. Die eigentümlichen Schwierigkeiten dieses Problems bestehen nicht wie in den zuvor behandelten Fällen im Mangel an rechentechnisch durchführbaren Lösungsmethoden sondern haben ganz andere Ursachen. In der Baustatik soll z.B. die Festigkeit einer Konstruktion vor ihrer Ausführung beurteilt werden, um unzweckmäßige Konstruktionen und den damit verbundenen Materialverbrauch von vorn herein zu vermeiden. Das geschieht dadurch, daß die in die üblichen Festigkeitsrechnungen eingehenden Bauparameter der geplanten Konstruktion in den für sie in Frage kommenden Wertbereichen variiert werden. Diese Variation der Bauparameter bedeutet wiederum für das lineare Gleichungssystem, das die Gleichgewichtsbedingungen zum Ausdruck bringt, daß sowohl seine Koeffizienten als auch die Zahlenwerte auf der rechten Seite variiert werden müssen. Der Statiker muß also eine* *sehr große Anzahl von Gleichungssystemen auflösen, die dieselbe Anzahl von Unbekannten enthalten, wenn er seinen Zweck erreichen will.*

Eine zweite Schwierigkeit tritt auf, wenn in der Physik oder in der Technik eine lineare Funktionalgleichung (etwa Differential- oder Integralgleichung) durch einen Ansatz mit unbekannten Koeffizienten gelöst werden soll. Für die Bestimmung der unbekannten Koeffizienten ergibt sich dann ein lineares Gleichungssystem, das eine um so bessere Näherungslösung liefert, je größer die Anzahl n der unbekannten Koeffizienten ist.

Legt man Wert auf eine gute Übereinstimmung zwischen Näherungslösung und exakter Lösung, so sind bei vielen Aufgaben leider Anzahlen zwischen 10 und 50 Unbekannten keine Seltenheit. Da nun der Rechenaufwand nicht etwa der Anzahl n der Unbekannten proportional ist, sondern sehr viel stärker mit n anwächst, sind besondere Maßnahmen erforderlich, um die Rechensicherheit zu gewährleisten und das Absinken der Genauigkeit im Laufe der langen Rechnung möglichst zu vermeiden.

Es ist daher kein Wunder, wenn in der mathematischen und technischen Literatur von Zeit zu Zeit immer wieder Aufsätze auftauchen, die sich mit der Auflösung linearer Gleichungssysteme beschäftigen. Im Jahre 1947 erschien in den Abhandlungen der Amsterdamer Akademie ein umfangreicher kritischer Bericht von E. Bodewig über die verschiedenen Methoden zur Lösung eines Systems linearer Gleichungen mit reellen Koeffizienten, der mit dem Ergebnis schließt, daß das beste aller Verfahren dasjenige ist, das Gauß im Zusammenhang mit der Ausgleichung einer großen Anzahl von Beobachtungen ersonnen hat. Die Eliminationsmethode von Gauß, die auch der Behandlung linearer Gleichungssysteme auf der Schule zugrundeliegt, beruht darauf, daß z.B. aus dem System

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 4x_5 & = & 2,62 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & - & 3x_5 & = & 3,08 \\
-3x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & -4,52 \\
4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -0,57 \\
3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2,48
\end{array}$$

mit den 5 Unbekannten x_1, x_2, ..., x_5 die Unbekannte x_1 durch Multiplikation zweier Gleichungen mit geeigneten Zahlen und anschließende Subtraktion entfernt wird, wodurch das System

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
4x_2 & + & 2,5x_3 & - & 1,5x_4 & - & x_5 & = & 1,77 \\
-8x_2 & + & 6,5x_3 & + & 2,5x_4 & - & 5x_5 & = & -0,59 \\
7x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & + & 7x_5 & = & -5,81 \\
8x_2 & - & 0,5x_3 & + & 0,5x_4 & + & 9x_5 & = & -1,45
\end{array}$$

mit den 4 Unbekannten x_2, x_3, x_4, x_5 entsteht. Hieraus wird in gleicher Weise die Unbekannte x_2 entfernt, wodurch man ein System für die 3 Unbekannten x_3, x_4, x_5 erhält, usw.. Das Ergebnis dieses Eliminationsprozesses ist das System

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 4x_5 & = & 2,62 \\
 & & 4x_2 & + & 2,5x_3 & - & 1,5x_4 & - & x_5 & = & 1,77 \\
 & & & & 11,5x_3 & - & 0,5x_4 & - & 7x_5 & = & 2,95 \\
 & & & & & & -0,696x_4 & + & 4,261x_5 & = & -7,016 \\
 & & & & & & & & 27,623x_5 & = & -36,462
\end{array},$$

das eine Dreiecksmatrix besitzt und sich von unten nach oben auflösen läßt[8]. *Nach den Feststellungen von Bodewig erfordert die Auflösung eines Systems von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten mit der Gaußschen Methode einschließlich der Quersummenkontrolle* $\frac{1}{3}n(n^2-1)+n^2$ *Multiplikationen und* $\frac{1}{6}n(n-1)(2n+5)$ *Additionen, im obigen Falle also 65 Multiplikationen und 50 Additionen.*
Zugleich zeigt dieses Beispiel, das völlig im Bereich der Elementarmathematik liegt, wie groß der Spürsinn unseres Altmeisters Gauß für die zweckmäßige Lösung numerischer Probleme gewesen sein muß, wenn sich sein Verfahren über hundert Jahre lang als bestes gegenüber allen anderen behaupten konnte. Erst im Anfang dieses Jahres erschien eine Arbeit von Zurmühl, in der er den Nachweis erbringt, das ein von ihm abgeändertes Rechenverfahren des polnischen Astronomen Banachiewicz noch weniger Arbeitsaufwand als das Gaußsche erfordert. Die Arbeitsersparnis wird jedoch bei Banachiewicz nicht dadurch erzielt, daß die Anzahl der Multiplikationen und Additionen im Vergleich zum Gaußschen Verfahren herabgesetzt wird, sondern dadurch, daß mit Hilfe der Möglichkeiten, die die moderne Rechenmaschine für die Durchführung von Matrizenmultiplikationen bietet, die Schreibarbeit wesentlich vermindert wird.
Allerdings scheint mir die Frage noch nicht geklärt zu sein, ob nicht die Verminderung der Schreibarbeit mit einer entsprechenden Erhöhung der Aufmerksamkeit des Rechners verbunden ist, die zu einer vorzeitigen Ermüdung führt und sich erst bei einer Dauerbeanspruchung des Rechners nachteilig auswirkt.

Beispiel 4 *Zwei völlig verschiedene Probleme, nämlich die Berechnug der Bogenlänge der Lemniskate und die Berechnung der Anziehungskraft eines elliptischen Ringes führten Gauß auf das elliptische Integral 1. Gattung*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}},$$

das sich bei variabler oberer Grenze an Stelle von $\frac{\pi}{2}$ *bekanntlich nicht durch elementare Funktionen in geschlossener Form darstellen läßt.*
Im Alter von 23 Jahren entwickelte Gauß den Zusammenhang dieses Integrals mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel $M(a,b)$ *in der Form*

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{M(a,b)}.$$

Zur Bestimmung von $M(a,b)$ *hat man zunächst aus den beiden positiven Zahlen* a *und* b *durch fortgesetzte Bildung arithmetischer und geometrischer Mittel die beiden Zahlenfolgen*

$$\begin{array}{cccccc}
a_1 & = & \frac{1}{2}(a+b) & , \; b_1 & = & \sqrt{ab} \\
a_2 & = & \frac{1}{2}(a_1+b_1) & , \; b_2 & = & \sqrt{a_1b_1} \\
a_3 & = & \frac{1}{2}(a_2+b_2) & , \; b_3 & = & \sqrt{a_2b_2} \\
. & . & . & , \; . & . & . \\
a_n & = & \frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}) & , \; b_n & = & \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \\
. & . & . & , \; . & . & .
\end{array}$$

[8] Die Lösung ist $x_1 = 0,20$, $x_2 = 1,15$, $x_3 = -0,46$, $x_4 = 2,00$ und $x_5 = 1,32$.

herzustellen. Im Falle $a \geq b > 0$ *strebt die Folge der arithmetischen Mittel* a_1, a_2, a_3, ... *von oben her und die Folge der geometrischen Mittel* b_1, b_2, b_3, ... *von unten her sehr rasch gegen einen gemeinsamen Grenzwert, der mit* $M(a, b)$ *bezeichnet wird. Über die Konvergenzgüte der beiden Zahlenfolgen hat Geppert folgendes bewiesen: „Nimmt man* $a = 1$, b *gleich einem echten Dezimalbruch, was stets möglich ist, so stimmen* a_n *und* b_n *in den ersten* $2^n - 1$ *Stellen hinter dem Komma überein, und diese Ziffern bleiben in allen folgenden* a_{n+k}, b_{n+k}, *also auch in* $M(a, b)$ *erhalten. Dieses Verhalten tritt immer ein, wenn n genügend groß ist.“*
Insbesondere erhält man für $a = 1$ *und* $b = 0,5$ *die Werte*

$$\begin{array}{lclclcl}
a_1 & = & 0,75 & , & b_1 & = & 0,707\,106\,7 \\
a_2 & = & 0,728\,553\,4 & , & b_2 & = & 0,728\,237\,6 \\
a_3 & = & 0,728\,395\,5 & , & b_3 & = & 0,728\,395\,4 \\
. & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

und erkennt hieraus, wie rasch sich der gesuchte Grenzwert $M(1; 0, 5)$ *durch durch ein paar Mittelbildungen eingabeln läßt.*
Unabhängig von dem Zusammenhang mit den elliptischen Integralen hat sich Gauß schon im Alter von 14 Jahren mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel beschäftigt und seine gute Konvergenz an Hand von Zahlenbeispielen festgestellt, die er bis auf viele Dezimalen durchgerechnet hat.
Treffend bemerkt hierzu Felix Klein[9]: „Alle diese frühen, nur zu eigener Lust ersonnenen Gedankenspiele sind Ansätze zu dem großen, erst viel später bewußt gewordenen Ziel. Es ist eben die ahnende Weisheit des Genies, selbst bei den halbspielenden Erstlingsproben der Kräfte, ohne Bewußtsein des tieferen Sinnes, die Spitzhacke gerade da ans Gestein zu setzen, wo die Goldmine verborgen liegt.“

Im Anschluß an diese Beispiele müßte noch auf die erfolgreiche Behandlung von Problemen der angewandten Mathematik mit Hilfe von graphischen Methoden und mathematischen Instrumenten eingegangen werden, was jedoch den Rahmen dieser Vorlesung erheblich überschreiten würde.
Statt desse möchte ich noch ein paar Worte den Sorgenkindern aller Mathematiker widmen, nämlich den nichtlinearen Problemen. Obwohl es der reinen Mathematik gelungen ist, z.B. beim sphärischen Pendel eine auch numerisch völlig befriedigende Lösungsmethode zu finden, ist die Mehrzahl dieser Probleme bis heute noch ungelöst oder wenigstens nicht so gelöst, daß man die Lösungsmethode als rechenfähig bezeichnen kann.
Ich glaube auch nicht, daß man mit der deduktiven Arbeitsweise der reinen Mathematik bei diesen Problemen viel erreichen kann, denn das Ziel des reinen Mathematikers ist nach Felix Klein „das vollständige, gänzlich durchforschte, nach großen Gesichtspunkten geordnete System aller Möglichkeiten, die der erwähnte Gegenstand bietet.“
Die nichtlinearen Probleme, die aus der Physik und der Technik stammen, sind aber gerade deshalb schwierig, weil die Anzahl der Denkmöglichkeiten viel zu groß ist, um sie alle numerisch durchzuprobieren. Zur Einschränkung dieser Möglichkeiten gelangt man sofort, wenn man den Hinweis von v. Mises beachtet, daß

[9] Vgl. F. Klein 1926, S. 32

beim Ansatz eines Problems der angewandten Mathematik der Zusammenhang mit der aus der Erfahrungswelt hervorgegangenen Problemstellung unbedingt gewahrt bleiben muß.
Genau wie in den Naturwissenschaften wird man sich also ein Gedankenmodell von dem zu berechnenden Vorgang bauen, das die nur wesentlichen Merkmale dieses Vorgangs widerspiegelt, und es durch vernünftige Annahmen soweit vereinfachen, bis es eine Durchrechnung mit tragbarem Zeitaufwand gestattet.
Ein besonders schönes Beispiel für diese Art von Modellbildungen liefert das Dreikörperproblem. Bei diesem Problem handelt es sich um die Bestimmung der Bewegung von zwei Planeten um die Sonne unter dem Einfluß der Newtonschen Anziehungskraft, wenn in einem einzigen Augenblick die Lage der drei Himmelskörper und ihre Geschwindigkeiten in bezug auf ein ruhend angenommenes Koordinatensystem gegeben sind. Wegen der großen Entfernung der drei Himmelskörper dürfen wir sie als punktförmig ansehen. Die außer diesen drei Himmelskörpern vorhandenen Planeten und Satelliten denken wir uns einfach aus dem Sonnensystem entfernt.
Wäre außer der Sonne nur die Erde vorhanden, so würde sie sich um die Sonne auf der bekannten Keplerschen Ellipse den Keplerschen Gesetzen gemäß bewegen. Betrachten wir jetzt das System Sonne, Erde, Jupiter, so wird die im Zweikörperproblem elliptische Bahn der Erde um die Sonne durch die Anziehung des Jupiters gestört. Das Maß der Störung ließe sich bestimmen, wenn die jeweilige Lage des Jupiters bekannt wäre. Sie ist es aber nicht, da die im Zweikörperproblem elliptische Bahn des Jupiters um die Sonne durch die Einwirkung der Erde gestört wird. Da die exakte Lösung dieses Dreikörperproblems auch heutzutage noch unüberwindliche Schwierigkeiten bereitet, hat man es durch folgende Annahmen eingeschränkt:

- Da die Massen von Sonne und Jupiter groß im Vergleich zur Erdmasse sind, wird angenommen, daß die Bewegung von Sonne und Jupiter durch die Anziehungskraft der Erde nicht gestört wird.

- Die beiden großen Massen bewegen sich auf kreisförmigen Bahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt, also mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in der gemeinsamen Bahnebene.

- Die Bewegung der Erde erfolgt in derselben Bahnebene, in der Sonne und Jupiter ihre Kreisbewegungen ausführen.

Erst auf der Grundlage dieses „eingeschränkten“ Dreikörperproblems ist es der Astronomie gelungen, die Bestimmung der Planeten- und Kometenbahnen durchzuführen.

Zitierte Literatur

[1] C. Dippe, editor. *Euklid's Elemente (fünfzehn Bücher)*. Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses Halle, 1840.

[2] Lothar Heffter. *Die Grundlagen der Geometrie*. B.G. Teubner Verlag Leipzig und Berlin, 1921.

[3] Otto Hölder. *Die Arithmetik in strenger Begründung*. J. Springer Verlag Berlin, 2. edition, 1929.

[4] Felix Klein. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Band I.* J. Springer Berlin, 1926.

[5] Max Planck. Positivismus und reale Außenwelt. In *Wege zur physikalischen Erkenntnis*, chapter Vortrag vom 12. 11. 1930 im Harnack-Haus der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaft, pages 201 – 218. S. Hirzel Verlag Leipzig, 1944.

[6] Max Planck. Ursprung und Auswirkung wissenschaftlicher Ideen. In *Wege zur physikalischen Erkenntnis*, chapter Vortrag vom 17. 2. 1933 im Verein Deutscher Ingenieure, Berlin, pages 243 – 257. S. Hirzel Verlag Leipzig, 1944.

[7] Jacob Steiner. *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander*. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 82 und 83. Akadem. Verlagsgesellschaft Leipzig, 1896.

[8] Carl Runge. *Graphische Methoden*. B.G. Teubner Verlag Leipzig und Berlin, 1915.

[9] K.G.Chr. v. Staudt. *Beiträge zur Geometrie der Lage (3 Hefte in 1 Band)*. Bauer u. Raspe Nürnberg, 1856.