Ostern 1874

Mathematische Arbeiten

von

E.E. Wiltheiß

1)
Es ist zu beweisen, daß in der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ das Produkt der beiden Wurzeln gleich dem letzten Glied q ist und daß die Summe der Wurzeln gleich dem mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Coefizienten p von x ist.

Beweis:
Man sieht die Wurzeln der Gleichung:

$$x^2 + px = -q; \quad x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q; \quad x + \frac{p}{4} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Also sind die beiden Wurzeln

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Man vervielfacht beide Wurzeln miteinander

$$x'x'' = \left[-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right] \cdot \left[-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right] =$$
$$\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$$

Also ist $x'x'' = q$.
Zählt man beide Wurzeln zueinander, so streichen sich $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, weil sich beide Wurzeln nur um die Vorzeichen von $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ unterscheiden:

$$x' + x'' = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = -2 \cdot \frac{p}{2}$$

Also ist auch $x' + x'' = -p$.

2)
Es haben mehrere Freunde für eine Partie 432 fl. Da zwei von ihnen frei gehalten werden, so wird dadurch der Beitrag eines jeden um 3 fl vermehrt. Wie viel Freunde und wie viel hat jeder zu bezahlen?

Auflösung:
Es wären x Freunde, und jeder hatte y fl bezahlen müssen, so würden sie, wenn jeder seinen Beitrag gäbe, xy fl bezahlen. Also

$$xy = 432 \tag{I}$$

Es bezahlen aber nur $(x-2)$ Personen und jede von diesen aber $(y+3)$ fl, also zusammen

$$(x-2)(y+3) = 432 \tag{II}$$

Die Klammern der Gleichung (II) aufgelöst:

$$xy - 2y + 3x - 6 = 432.$$

In diese Gleichung den Werth von y aus Gleichung (I) eingesetzt:

$$\left(y = \frac{432}{x}\right); \quad \frac{x \cdot 432}{x} - \frac{2 \cdot 432}{x} + 3x - 6 = 432$$

oder vereinfacht

$$x^2 - 2x = 288 \quad x = 1 \pm \sqrt{288+1} = 1 \pm 17; \quad x = 18$$

denn negative n Personen kann es nicht geben.
Den Werth von x in Gleichung (I) eingesetzt

$$y \cdot 18 = 432, \quad y = 24.$$

Es waren also <u>18</u> Freunde und jeder hatte <u>24</u> fl zu bezahlen. [1]

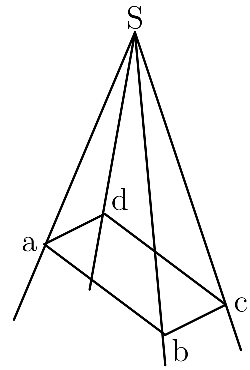
3)
Es ist zu beweisen, warum nur eine beschränkte Anzahl regelmäßiger Figuren zur Bildung einer körperlichen Ecke benutzt werden können.

Beweis:

Die Kantenwinkel, welche eine Ecke bilden, sind zusammen kleiner als $4R.$, und dies muß man zuerst beweisen.
Man läßt die n-seitige Ecke S durch die Ebene $abcd$ schneiden und bezeichnet der Kürze wegen die Kantenwinkel um S mit v und die Winkel $Sad + Sab + Sba + Sbc...$ mit s, so ist $s > (n-2)2R$. Denn von je 3 Winkel, welche eine Ecke bilden, sind 2 größer als der dritte, also ist $Sad + Sab > dab$; $Sba + Sbc > abc$; u.s.w. Die Winkel $Sad + Sab + Sba + Sbc... = s$ und $dab + abc....$ sind die Winkel des n Ecks, welches durch die Ebene $abcd$ entsteht, also gleich $(n-2)2R$. Folglich $s > (n-2)2R$.

Die Winkel $s + v = n \cdot 2R$. Denn es sind ja die 3 Winkel von n Dreiecken. Setzt man nun in $s > 2nR - 4R$ statt $2 \cdot nR = s + v$: $s > s + v - 4R$ oder $4R + s > s + v$ oder $4R > v$ d.h. die Winkel um eine Ecke kleiner $4R$.

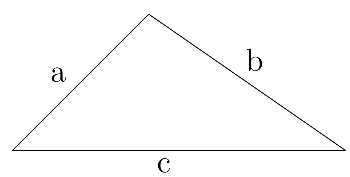
[1] Korrektur des Lehrers: Da aber 2 Freunde kein Geld hatten, mußte jeder von den 16 übrigen 27 fl. zahlen.



Es ist nun jeder Winkel in einem regelmäßigen Dreieck 60°. Es können daher 3, 4, 5 regelmäßige Dreiecke eine Ecke bilden, denn der Summenwinkel ist kleiner als $4R$. Aber nicht 6, denn sie würden 360° bilden. Ebenso 3 regelmäßige Vierecke, aber nicht 4 oder mehr, und 3 regelmäßige 5Ecke, allein nicht mehr. Regelmäßige 7 u. 8Ecke nicht, denn je 3 Winkel bilden zusammen mehr als 360, und aus zwei [Flächen] kann keine Ecke entstehen.

4)
In einem schiefwinkligen Dreieck sind gegeben $b = 71,577$, $c = 87,811$ und der Winkel $A = 40°36'$. Es sollen die anderen Stücke bestimmt werden.

Auflösung
Die Formel ist: $\mathrm{tg}\frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b} \cot\frac{A}{2}$



Die Werte eingesetzt:

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}\frac{C-B}{2} &= \frac{87,811 - 71,577}{87,811 + 71,577} \cot 20°18 \\ &= \frac{16,234}{159,388} \cot 20°18'.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log 16,234 &= 1,2104255 \\ \log\cot 20°18 &= \underline{10,4319025} \\ & \ 11,6423280 \\ \log 159,388 &= \underline{2,2024556} \\ \log \mathrm{tg}\frac{C-B}{2} &= 9,4398724\end{aligned}$$

$$\frac{C-B}{2} = 15°23'40''$$
$$C = 85°5'40''$$
$$B = 54°18'20''$$

Um die Seite a zu berechnen gebraucht man die Formel:

$$a : c = \sin A : \sin C$$
$$a = \frac{c \sin A}{\sin C},$$

oder die Werte eingesetzt

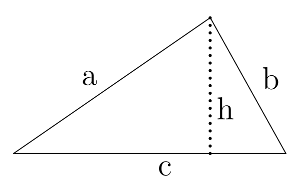
$$a = \frac{87,811 \cdot \sin 40°36'}{\sin 85°5'40''}$$

$$\begin{aligned} \log 87,811 &= 1,9435489 \\ \log \sin 40° &= \underline{9,8134303} \\ & 11,7569792 \\ \log \sin 85 &= \underline{9,9984063} \\ \log a &= 1,7585729 \\ a &= 57,3552 \end{aligned}$$

Die fehlenden Stücke sind $a = 57,3552$, $B = 54°18'20''$, $C = 85°5'40''$

5)
Es sollen die zur vorgehenden Aufgabe nöthigen Formeln gefunden werden.

Auflösung:



Wir fällen in einem beliebigen Dreieck die Höhe h, dann ist

$$h = b \sin A = a \sin B, \quad \text{also} \quad a : b = \sin A : \sin B$$

(Dies ist die <u>zweite</u> Formel zur vorhergehenden Aufgabe), zählen 1 hinzu und 1 ab und dividieren sie in einander:

$$
\begin{aligned}
\frac{a+b}{b} &= \frac{\sin A + \sin B}{\sin B} \\
\text{u.} \quad \frac{a-b}{b} &= \frac{\sin A - \sin B}{\sin B}, \quad \text{u. also} \\
\frac{a-b}{a+b} &= \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} \\
&= \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}} \\
&= \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}} \\
\frac{a-b}{a+b} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}
\end{aligned}
$$

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}, \quad \text{denn} \quad \frac{A+B}{2} = 90 - \frac{C}{2}.$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}},$$

also ist

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

Es ist dies die erste Formel der vorigen Aufgabe.

6)

Es leiht ein Staat eine Summe von 1570000 fl zu 4 1/2 %, welche Summe muß er jährlich bezahlen um die Schuld in 70 Jahren zu tilgen.

Auflösung:

Die Aufgabe ist eine zusammengesetzte Rabattrechnung, die Formel dazu heißt:

$$A = \frac{100}{p}\, a \left[1 - \left(\frac{100}{100+p}\right)^n\right]$$

$$A = 1570000; \quad p = 4,5 \quad n = 70$$

$$1570000 = \frac{100 \cdot a}{4,5}\left[1 - \left(\frac{1000}{1045}\right)^{70}\right]$$

$$a = \frac{1570000 \cdot 4,5}{100\left[1 + \left(\frac{1000}{1045}\right)^{70}\right]}$$

$$a = \frac{1570 \cdot 45}{1 - \left(\frac{1000}{1045}\right)^{70}}$$

$$\left(\frac{1000}{1045}\right)^{70} = 0,045905$$

$$a = \frac{1570 \cdot 45}{0,954095} = 74049,2$$

74049,2 ist also die jährliche Summe.