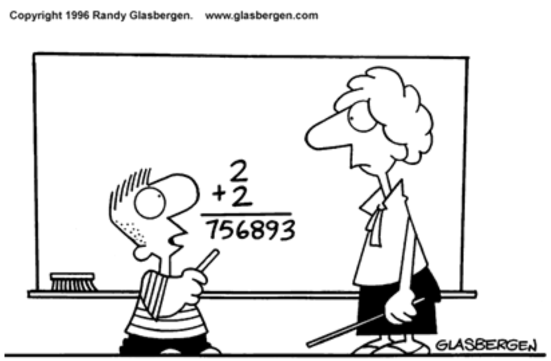
# Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte ...

## Messen, Schätzen, Überlegen – viele Wege, viele Antworten

***Wilfried Herget***




**"In an increasingly complex world, sometimes old questions require new answers."**

„In Mathe wird gerechnet!" – ja, aber nicht nur und nicht immer!

Der Mathematikunterricht soll und kann auch das Mathematisieren vermitteln, das Übersetzen in die leistungsfähige Sprache der Mathematik, und das Finden verschiedener, angemessener Lösungswege. Hierzu werden einige ungewöhnliche, offene Aufgabenstellungen für die Sekundarstufe I vorgestellt.

Typisch dabei ist, dass nicht das Rechnen im Zentrum steht, sondern vielmehr die Schritte *vor* dem Rechnen: „Here is a situation. Think about it!" *(Henry POLLAK)*.

Der Wert dieser Aufgaben – oder richtiger: ihrer Lösungen – liegt in dem Vergnügen, sich kreativ und mutig auf den Weg gemacht zu haben, und in der Erfahrung, selbstständig zu einer (zugegebenermaßen angenäherten) Lösung gelangt zu sein statt „zu einer Antwort nur ehrfürchtig aufzuschauen oder sie jemand anderes finden zu lassen" (*von* BAEYER).



„In Mathematik wird gerechnet!" – ja, aber nicht nur und nicht immer! – „Mathematische Grundausbildung muss mehr vermitteln als Fertigkeiten, die auch automatisiert werden können. Die Kraft des mathematischen Denkens liegt in der Fähigkeit zur Begriffs- und Modellbildung und zur Entwicklung leistungsfähiger Algorithmen für konkrete Problemlösungen; dafür muss Verständnis und Begeisterung geweckt werden", fordern die Fachverbände DMV, GDM, MNU angesichts der TIMSS-Ergebnisse in Deutschland.

- **Ganz genau ...**

Im Alltag des Mathematikunterrichts dominiert meist die Präzision. „Gegeben $a = 4$ cm, $b = 7$ cm, $c = 5$ cm ..." (natürlich ganz genau!) „... wie groß ist $V$?" Diese „Präzisions-Mathematik" hat zweifellos ihren Wert: An ihr entlang können die wesentlichen Ideen erfahren und geübt werden – das ist schon anstrengend genug. Doch festigt sich auf diese Weise eine Schein-Welt in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler: „Ergibt sich am Ende einer langen Rechnung mit Brüchen und Wurzeln eine ganze Zahl, dann ist dies für den Schüler ein Indiz dafür, dass er wohl richtig gerechnet hat. Dabei stört ihn nicht, dass die gestellte Aufgabe ein derart schönes Ergebnis überhaupt nicht erwarten lässt." (SCHEID 1994, S. 179)

Diese Genauigkeit und Sicherheit prägt den Mathematikunterricht – der nebenstehende Cartoon spießt dies mit Augenzwickern auf. Diese Genauigkeit geht aber unwiederbringlich verloren, wenn sich die Mathematik mit dem „Rest der Welt" einlässt: Dann sind die meisten der vorkommenden Zahlen zwangsläufig und unvermeidbar nur begrenzt genau, und entsprechend ungenau sind die daraus ermittelten Ergebnisse (HERGET 1999 a).

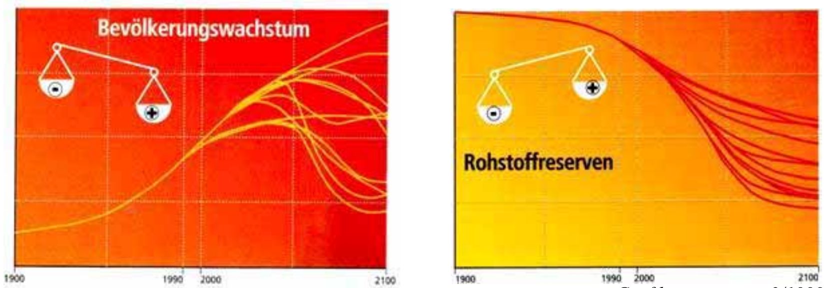

*mathematik lehren 45 (1991), S. 1*

„Für eine Einwohnerzahl von 385.000 spielt es keine Rolle, ob die genaue Zahl an einem bestimmten Stichtag 385.272 oder 385.273 betrug. Für die Frage, ob 385.272 durch 9 teilbar ist, wäre eine solche Änderung ungleich gravierender. Hier darf keine Ziffer geändert werden, ohne Sinn und Richtigkeit der Angabe zu verändern. Diese Frage gehört zur ‚Welt der genauen Zahl'." (BLANKENAGEL 1983, S. 315)

## ... und ungefähr

Der Lauf der Gestirne lässt sich relativ genau beschreiben: Mond- und Sonnenauf- und -untergang stehen in der Zeitung, Vollmond, Neumond kann man zuverlässig dem Kalender entnehmen, Mond- und Sonnenfinsternis treten wie angekündigt ein.

Mit dieser Genauigkeit ist es aber schon vorbei, wenn wir das Wetter oder den Aktienkurs für morgen vorhersagen wollen. Bevölkerungs- und Rohstoffprognosen sind angesichts der schwierigen Datenlage und der zahlreichen Einflussgrößen auf längere Sicht nur sehr begrenzt zuverlässig, die Klima-Wissenschaftler mit ihren konkurrierenden Klima-Modellen müssen ihre ohnehin untereinander sehr unterschiedlichen Prognosen alle paar Jahre korrigieren, bei Wirtschaftsprognosen nur für das nächste Jahr irren sich die Expertenteams sogar regelmäßig.




*Grafiken aus natur 2/1999*

Ein Mathematikunterricht, der dem Allgemeinbildungs-Anspruch gerecht werden will, wird die Schülerinnen und Schüler also auch auf den kritischen Umgang mit der alltäglichen Zahlen- und Prognoseflut einstimmen.

## Brücken schlagen!

Im Unterricht wird uns deshalb daran gelegen sein, eine Brücke zwischen diesen beiden Welten zu schlagen, zwischen der Schärfe der Mathematik und der Unschärfe im „Rest der Welt" – denn beide Welten sind wichtig, beide sind unverzichtbar: Wie soll man den Wert der absoluten Genauigkeit und Gewissheit der Mathematik wirklich schätzen lernen, wenn man nicht gelernt hat, dass im „Rest der Welt" diese Präzision und Zuverlässigkeit fast nie erreichbar ist? Und umgekehrt kann man mit dieser Ungenauigkeit und Unschärfe nur dann „so gut wie möglich" umgehen, wenn man die Möglichkeiten der exakten Mathematik nutzen gelernt hat (HERGET 1999 a).



## Mathematik aus der Zeitung

Wie lässt sich eine Brücke zwischen der Mathematik und dem „Rest der Welt" schlagen? Eine Möglichkeit sind Aufgaben zu Realsituationen, bei denen ein gewisses Intervall an Lösungswerten zu erwarten ist (und von der Lehrkraft als „richtig" anzunehmen ist). Zeitungsausschnitte bieten hierfür oft einen sehr guten Anlass (siehe auch HERGET; SCHOLZ 1998 und HERGET 1999 b).

- **In der nebenstehenden Zeitungsmeldung wird eine Fehlerquote eingeräumt.**

  **Berechne damit eine obere und eine untere Grenze der Bevölkerungszahl in China!**

- **Was hältst du von der Genauigkeit in der Überschrift?**

*Frankfurter Rundschau, 01. 11. 1990*

**In China leben offiziell 1 133 682 501 Menschen**

PEKING, 31. Oktober (Reuter). Die Ergebnisse der jüngsten Volkszählung in China sind nach Angaben der ausländischen Behörden überprüft und für korrekt befunden worden. Am Dienstag waren erste Ergebnisse der vierten landesweiten Zählung in China bekanntgegeben worden. Danach lebten am Stichtag 1. Juli 1990 1 133 682 501 Menschen in der Volksrepublik. Die Behörden selbst gehen von einer Fehlerquote bei der Erfassung von 0,6 Prozent aus.
Gemessen an dem Ergebnis der Volkszählung von 1982 bedeutet dies einen Bevölkerungszuwachs um 125,5 Millionen, zugleich wird damit das bevölkerungspolitische Soll um 20 Millionen überschritten.

## Ein Bild – eine Frage – viele Wege

Ein besonderer Typ sind schließlich Aufgaben, die aus meist ungewöhnlichen Zeitungsausschnitten entstehen und die ich „Bild-Aufgaben" nenne. An der Realität orientierte Anwendungsaufgaben sind leider meist – wenn sie diesem Anspruch wirklich gerecht werden – sehr textlastig: Fast unumgänglich muss die Real-Situation wortreich und informationsdicht beschrieben werden. An diese Stelle tritt hier nun das Bild – ergänzt durch das Alltagswissen und die Fantasie der Schülerinnen und Schüler: „Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte!"

Ausgangspunkt ist eine mathematisch an sich recht einfache Situation, und Ziel ist, daran entlang insbesondere den Prozess der mathematischen Modellbildung ganz bewusst zum Thema im Unterricht zu machen: „The problem situation must be simple if the pupil is to successfully develop models for himself – far simpler than when he has the model provided for him by the teacher." und „Only mathematics that is very well absorbed seems to be usable in modelling." (BURKHARDT 1981, S. 15, zitiert nach BUSSE 1999)

**Das Adenauer-Denkmal** *vom Künstler Hubertus von Pilgrim* FOTO: GA-ARCHIV

*GENERAL-ANZEIGER, Bonn, 15. 06. 1999*

Dieses Denkmal steht am Bundeskanzlerplatz in Bonn.
Es zeigt den Kopf von Konrad Adenauer (geb. 15. 01. 1876, gest. 19. 04. 1967), der von 1949 bis 1963 erster Bundeskanzler der Bundesrepublik Deutschland war.

- **Wie groß müsste wohl ein entsprechendes Denkmal sein, wenn es Adenauer „von Kopf bis Fuß" in demselben Maßstab darstellen soll?**

*(Quelle: HERGET; JAHNKE; KROLL)*



- **Adenauer-Denkmal „von Kopf bis Fuß"**[1]

Welchen Bezugspunkt haben wir auf diesem Foto? Natürlich die Kinder. Damit ergeben sich (mindestens) zwei Wege, um die gestellte Frage zu beantworten:

Weg 1:

Wir ermitteln das Abbildungsverhältnis des Fotos: Das Mädchen im Vordergrund ist im Foto etwa 10 cm lang. Wie groß ist das Mädchen in Wirklichkeit? Wie alt ist es etwa? Hier sind wieder das Alltagswissen und eine gewisse Kompromissbereitschaft gefragt – vielleicht einigen wir uns auf etwa 1,30 m? Die Maße aus dem Foto sind dann also ungefähr mit dem Faktor $130 : 10 \approx 13$ zu multiplizieren, um die entsprechenden tatsächlichen Maße zu erhalten.

Der Kopf des Denkmals ist auf dem Foto 12 cm hoch, in Wirklichkeit ist er also etwa $12\text{ cm} \cdot 13 = 156\text{ cm} \approx 1{,}5\text{ m}$ hoch.

Wie groß müsste dann das Denkmal „von Kopf bis Fuß" sein? Hier bemühen wir wieder unser Alltagswissen: Das Verhältnis Körperlange zu Kopfhöhe ist bei allen Erwachsenen ungefähr gleich (bei Kindern ist dieses Verhältnis etwas kleiner, da sie einen verhältnismäßig größeren Kopf haben). Wir messen bei der Lehrkraft nach (wenn sie mitmacht) und stellen fest, dass wir ungefähr 7-mal so lang sind wie unser Kopf (Vielleicht weiß dies jemand auch aus dem Kunstunterricht?). Für die gesuchte Gesamthöhe eines vollständigen Adenauer-Denkmals ergibt sich damit schließlich $1{,}5 \cdot 7 \approx 10$ m.

Weg 2:

Wir ermitteln nicht das Abbildungsverhältnis des Fotos, sondern bestimmen das Größenverhältnis des Denkmal-Kopfes zu dem Kopf eines Erwachsenen.

Als Vergleichsgrößen auf dem Foto sind für uns der Kopf des Jungen auf dem Denkmal-Sockel oder der Kopf des Mädchens am geeignetsten. Wie alt ist wohl der Junge? Und wie alt ist das Mädchen? Auch hier geht es nicht ohne Alltagswissen. Wie viel größer ist der Kopf eines Erwachsenen? Wir messen in der Klasse und bei der Lehrkraft nach und berechnen daraus den Faktor, um den ein Erwachsenen-Kopf größer ist als der des abgebildeten Jungens oder des Mädchens. Natürlich wird es einige Diskussion um die unterschiedlichen Werte geben, und auch hier ist ein Kompromiss notwendig. Vielleicht einigen wir uns darauf, dass ein Erwachsenen-Kopf wohl etwa um den Faktor 1,1 größer sein dürfte als der Kopf des Jungens oder des Mädchens.

Der Kopf des Jungens ist auf dem Foto etwa 1,4 cm hoch, der Denkmal-Kopf etwa 10 cm, jeweils gemessen vom Kinn bis zum Scheitel. Damit ergibt sich für das „Vergrößerungsverhältnis" des Denkmals

[1] Aufgabe nach: HERGET; JAHNKE; KROLL 2000.

$$k \approx \frac{10\text{ cm}}{1{,}1 \cdot 1{,}4\text{ cm}} \approx 6{,}5\,.$$

Wie groß ist ein Erwachsener? Wir gehen vielleicht von 1,80 m aus. Dann ergibt sich für ein Adenauer-Denkmal „von Kopf bis Fuß“ eine Höhe von 1,80 m · 6,5, also ungefähr 12 m.

Dieses Ergebnis unterscheidet sich von dem ersten Ergebnis nach dem Weg 1. Wer hat nun Recht? Welches Ergebnis ist richtig? – Hier entsteht eine für den Mathematikunterricht sehr ungewohnte und sicherlich für viele (Lernende wie Lehrende) gewöhnungsbedürftige Situation: Tatsächlich sind *beide* Ergebnisse „richtig“! Denn angesichts der unvermeidbaren Ungenauigkeiten liegen die beiden Lösungen „etwa 10 m“ und „etwa 12 m“ sehr „nahe“ beieinander, sozusagen in einem gemeinsamen „Vertrauensintervall“.

Wir können ein solches „Vertrauensintervall“ für eine Lösung auch berechnen, indem wir bei jedem einzelnen Schritt jeweils eine obere und eine untere Schranke bestimmen und mit diesen dann weiter „doppelt rechnen“ – eine gute Übung, die durchaus einiges Nachdenken erfordert, denn es wird ja mal multipliziert, mal dividiert.

Als Ergebnis halten wir also fest: Ein vollständiges Adenauer-Denkmal wäre ungefähr 10 m groß.

Anschließend können sich auch weiterführende Nach-Fragen ergeben, und zwar innerhalb und außerhalb der Mathematik (vgl. auch HERGET; JAHNKE; KROLL):

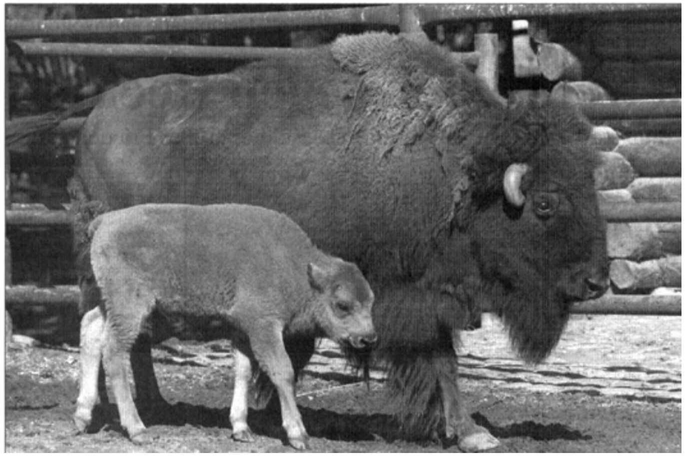
- Gibt es überhaupt so große Denkmäler, die eine riesige Person wirklich von Kopf bis Fuß zeigen?

  Ja, durchaus: Die New Yorker Freiheitsstatue ist etwa 46 m vom Fuß bis zur Fackel-Spitze hoch, das Herrmanns-Denkmal bei Bielefeld misst 26 m. Schon der Koloss von Rhodos, eines der sieben Weltwunder der Antike, war etwa 30 m hoch – er wurde 292–280 v. Chr. erbaut und 227 v. Chr. durch ein Erdbeben zerstört.
- Wie viel Wolle bräuchte man für eine passende Pudelmütze?

Je nach Möglichkeit können einzelne Schülerinnen und Schüler oder Arbeitsgruppen diesen Fragen weiter nachgehen und ihre Ergebnisse dann in der Klasse vorstellen. Vielleicht entsteht daraus auch eine Wandzeitung in der Klasse oder sogar eine interessante Ausstellung in der Schule?



***Nachwuchs im Stralsunder Bison-Gehege***



Noch etwas schwach auf den Beinen ist das kleine Bisonkalb Astor, das im Stralsunder Tierpark Mitte August zur Welt kam. Der Zoo der Hansestadt ist der einzige im Land, in dem die bis zu einer Tonne schweren Wildrinder aus Nordamerika heimisch sind. Foto: dpa

*Ostsee Zeitung, 8. 9. 1998*

- **Wie schwer ist dieses Bison-Baby?**

- **Wie schwer ist dieses Bison-Baby?**

Welche Bezugsgröße für das Bison-Baby gibt es auf dem Foto? Augenscheinlich nur das Muttertier. Wie groß, wie schwer ist das Muttertier? Zu dessen Gewicht ist aus dem Text heraus zumindest eine grobe Information zu gewinnen: Die Bison-Rinder werden danach bis zu einer Tonne schwer. Wie schwer aber ist das Muttertier auf dem Foto? Da können wir nur vermuten. Vielleicht etwas weniger als das genannte Maximalgewicht? Sind bei den Bison-Rindern möglicherweise die Bullen am schwersten und die Kühe etwas leichter? Wir müssen uns entscheiden – vielleicht für 800 kg.

Auf dem Foto ist das Muttertier etwa 8,3 cm hoch (dies nennt man die Widerristhöhe – insbesondere die Pferdekenner unter den Schülerinnen wissen das) und 10,5 cm lang, das Bisonkalb Astor ist etwa 4,9 cm hoch und 5,5 cm lang. Für das Verhältnis der (Widerrist-)Höhen ergibt sich damit

$$k_H \approx \frac{8{,}3\text{ cm}}{4{,}9\text{ cm}} \approx 1{,}7$$

und für das Verhältnis der Längen

$$k_L \approx \frac{10{,}5\text{ cm}}{5{,}5\text{ cm}} \approx 1{,}9\,.$$

Wie groß ist das Verhältnis der Breiten der beiden Tiere? Dazu können wir nichts aus dem Foto entnehmen, leider. Hier sind wir auf unser Alltagswissen angewiesen: Das Breitenverhältnis wird etwa genau so groß wie die beiden anderen Verhältnisse sein. Wir entscheiden uns also zum Beispiel für $k_B \approx 1{,}8$.

Was bedeutet das nun für das Gewicht?

Das Muttertier ist um den Faktor $k_H$ höher als das Bisonkalb, um den Faktor $k_L$ länger und um den Faktor $k_B$ breiter. Für das Volumen bedeutet das den Faktor $k_V = k_H \cdot k_L \cdot k_B \approx 1{,}7 \cdot 1{,}9 \cdot 1{,}8 \approx 5{,}8$.

Und wie ist das mit dem Gewicht? Auch hier müssen wir Alltagswissen aktivieren: Die Körperform und das spezifische Gewicht beider Tiere dürften sich nicht allzu sehr unterscheiden. Damit haben wir nun alles zusammengestellt und erhalten für das Bisonkalb Astor schließlich fast 1½ Zentner:

$$m \approx \frac{800\text{ kg}}{5{,}8} \approx 140\text{ kg}\,.$$

Sicherlich findet sich auch eine Schülerin, ein Schüler, um einmal bei den Biologie-Lehrkräften nachzufragen, bei einem Zoo anzurufen, im Lexikon nachzuschauen oder sich im WWW auf die Suche zu machen!

Natürlich könnten wir auch hier ein „Vertrauensintervall" für eine Lösung berechnen: Bei jedem Schritt – auch bei einer Schätzung, etwa des Gewichts des Muttertiers und der Frage des Körperbaus und des spezifischen Gewichts bei Kalb und Muttertier – bestimmen wir jeweils eine untere und eine obere Schranke, um mit diesen dann weiter „doppelt zu rechnen". Dabei wird deutlich, wie aufgrund der Vielzahl von Einzelmessungen, Annahmen und Schätzungen sich der unvermeidliche Fehlerbereich „aufschaukelt": Zum Beispiel 10 % Unterschied bei den Größenfaktoren ergeben bereits über 30 % Unterschied beim Volumen: $k \cdot 1{,}1^3 = k \cdot 1{,}331$.




Samstag und Sonntag startet auf dem Osterfeld mehrmals dieser stattliche Heißluftballon aus der niederländischen Partnerstadt Oldenzaal. Interessierte erfahren die Startzeiten am Stand auf dem Marktplatz.

*extra Wochenblatt, 18. 3. 1999*

- **Wie viel Liter Luft sind in diesem Heißluftballon?**

*(Quelle: Herget (2000 b))*

- **Wie viel Liter Luft sind in diesem Heißluftballon?**[2]

Natürlich ist man hier zunächst versucht, den Heißluftballon möglichst genau mithilfe eines mathematisch beschreibbaren Körpers zu modellieren. Über je mehr mathematisches Instrumentarium man verfügt, umso mehr wird man davon bei der Lösung dieser Aufgabe auch Gebrauch machen wollen.

Im Analysis-Kurs würde sich gar die Interpretation als Rotationskörper anbieten. Die modernen Taschenrechner mit eingebauten Programmen für Regressionsanalyse setzen dabei für den Funktionstyp fast keine Grenzen. Sollte das entstehende Integral dann nicht einfach lösbar sein, könnte man es mit dem Rechner noch relativ bequem numerisch lösen. Aber liefern diese hochgenauen mathematischen Modelle und Instrumente wirklich so genaue Ergebnisse?

Es geht hier (wie auch in vielen anderen Fällen) einfacher. Wir schauen uns dazu im „Modellbaukasten" der uns vertrauten geometrischen Körper um und wählen geeignet aus: Was könnte für diese Situation gut passen?

Weg 1:

Der obere Teil des Heißluftballons wird mit einer Halbkugel modelliert, der untere mit einem zylindrischen Kegel. Für das Volumen der Halbkugel ist $V = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3$ bekannt, für das Volumen des Kegels $V = \frac{1}{6}\pi \cdot r^2 \cdot h$ (oder wird aus der Formelsammlung entnommen).

Wie groß aber sind $r$ und $h$? Einzige Informationsquelle ist das vorgelegte Foto – wir versuchen, aus dem Foto die Maße des Ballons zu entnehmen und daraus geeignet die wirklichen Maße zu berechnen. Als Bezugsgrößen dafür kommen nur die Menschen auf dem Foto in Frage, am besten geeignet sind die Personen unmittelbar neben dem Korb des Ballons. Als Erstes messen wir auf dem Foto die vollständige Länge einer offenbar erwachsenen Person – hier etwa 1,1 cm. Dann messen wir den Durchmesser des Ballons an seiner breitesten Stelle – hier etwa 8,6 cm. Jetzt ist unser Alltagswissen gefragt: Eine erwachsene Person ist etwa 1,80 m groß. Daraus ergibt sich dann bereits der erste der beiden Werte:

$$r \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{8{,}6\text{ cm}}{1{,}1\text{ cm}} \cdot 1{,}8\text{ m} \approx 7\text{ m}.$$

Nun muss noch die Höhe des „Kegels" im Foto gemessen werden. Dies erweist sich allerdings als nicht ganz so einfach, denn das Foto ist „schräg von unten" aufgenommen und nicht aus größerer Entfernung von der Seite. Hier gilt es also zunächst einmal, sich mit der geometrischen Situation etwas genauer auseinander zu setzen. Eine Lösung ist, die Höhe bis zu einem „gedachten" Durchmesser des Ballons an seiner breitesten Stelle zu messen. Dabei gehen die Ansichten durchaus auseinander, die Messungen variieren zwischen 7 und 8 cm. Wir

[2] Aufgabe nach: HERGET (2000 b).



einigen uns schließlich, beispielsweise auf 7,5 cm. Außerdem ist der Ballon in der Mitte bauchiger als unser Modell-Kegel, andererseits fehlt dem Ballon unten die Spitze des Modell-Kegels – das sollte sich etwa ausgleichen. Damit ergibt sich dann ungefähr

$$h \approx \frac{7{,}5\text{ cm}}{1{,}1\text{ cm}} \cdot 1{,}8\text{ m} \approx 12\text{ m}.$$

Beim Messen wird uns sehr bewusst, wie ungenau diese Werte sind. Es hat also offensichtlich wenig Sinn, die vom Taschenrechner angezeigten Nachkommaziffern sorgfältig zu notieren. Wir könnten – vielleicht in einem zweiten Durchgang – sogar mit unteren und oberen Werten rechnen und auf diese Weise schließlich eine Art von „Vertrauensintervall" für die Antwort gewinnen.

Insgesamt erhalten wir damit für das Volumen des Ballons

$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3 + \frac{1}{6}\pi \cdot r^2 \cdot h \approx \frac{2}{3}\pi \cdot 7^3\text{ m}^3 + \frac{1}{6}\pi \cdot 7^2 \cdot 12\text{ m}^3 \approx 700\text{ m}^3 + 300\text{ m}^3 \approx 1000\text{ m}^3.$$

Eine genauere Angabe als $V \approx 1000\text{ m}^3$ wäre hier angesichts der offensichtlich unvermeidbaren Ungenauigkeit beim Messen, Schätzen und Modellieren jedenfalls nicht „ver-Antwort-bar".

Weg 2:

Man kann den Ballon noch einfacher modellieren: Wir wählen eine entsprechend große Kugel als geeignete „Ersatz-Form". Diese „Ersatz-Kugel" wählen wir so „nach Augenmaß", dass sie im unteren Teil etwas über den Ballon herausragt, im mittleren Teil aber ein wenig innerhalb des Ballons verläuft, um so einen möglichst passenden Volumen-Ausgleich zu schaffen.

Der Radius dieser Kugel ist wie bei Weg 1 aus dem Foto heraus zu bestimmen. Allerdings wird beim Messen des Durchmessers der „Ersatz-Kugel" klar, dass es einen beträchtlichen Spielraum dafür gibt, etwa zwischen 7,5 und 8,5 cm. Wir müssen uns schließlich entscheiden, vielleicht für 8 cm. Damit ergibt sich dann für den wirklichen Radius

$$r \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{8\text{ cm}}{1{,}1\text{ cm}} \cdot 1{,}8\text{ m} \approx 6{,}5\text{ m}$$

und für das Kugel-Volumen schließlich

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \approx \frac{4}{3}\pi \cdot 6{,}5^3\text{ m}^3 \approx 1100\text{ m}^3.$$

Auch hier wäre eine genauere Angabe als $V \approx 1000\text{ m}^3$ angesichts der unvermeidbaren Ungenauigkeiten kaum „ver-Antwort-bar".

Weg 3:

Es geht aber noch etwas einfacher: Wir stellen uns einen Würfel so vor, dass er „nach Augenmaß" mit seinen Ecken über den Ballon herausragt, seine Seiten-flächen aber teilweise in den Ballon „hineintauchen". Dabei sollten der einerseits entstehende Volumen-Überschuss und das Volumen-Defizit andererseits sich die Waage halten.

Diese doch sehr schlichte Modellierung liegt erfahrungsgemäß uns Lehrkräften eher fern – wir verfügen in unserem „Modellbaukasten" eben über viel feinsinnigere geometrische Ersatz-Modelle. Allerdings steckt dahinter immerhin eine sehr grundlegende und weit tragende mathematische Idee: die Annäherung von krummlinig begrenzten Flächen und Körpern durch geradlinig begrenzte Flächen und Körper – vgl. etwa die ARCHIMEDES-Näherung für die Kreisfläche und die RIEMANN-Summen für das Integral!

Legen wir also mutig unseren Ersatz-Würfel in das Foto! Wie groß wäre seine Kantenlänge im Foto? Vielleicht könnten wir uns auf etwa 6,5 cm einigen? Damit ergibt sich für die wirkliche Kantenlänge dann

$$a \approx \frac{6{,}5\ \text{cm}}{1{,}1\ \text{cm}} \cdot 1{,}8\ \text{m} \approx 10{,}6\ \text{m}$$

und für das Würfel-Volumen schließlich

$$V \approx 10{,}6^3\ m^3 \approx 1200\ m^3.$$

Natürlich wäre auch hier eine genauere Angabe als $V \approx 1000\ \text{m}^3$ angesichts der unvermeidbaren Ungenauigkeiten wenig sinnvoll.

Mit mal etwas mehr, mal weniger Rechnen, aber in allen Fällen geschickten, der Situation angepassten Überlegungen liefern alle diese Modelle für das Volumen also rund 1000 $\text{m}^3$.

Weitere Nach-Fragen können sich unmittelbar anschließen:

- Rund 1000 $\text{m}^3$ – wie viel Liter sind das eigentlich?
- Wie lange müsste man dafür mit einer Fahrrad(heiß-)luftpumpe pumpen?
- Wie viel Quadratmeter groß ist die Hülle des Heißluftballons?
- ...

**Prall gefülltes Vergnügen in luftiger Höhe**

Zwölf Tage lang war das sechs Mitglieder umfassende deutsche Team in der mongolischen Hauptstadt Ulan Bator, um an dem 1. Internationalen Luftsport-Festival teilzunehmen.

„In diesem Land gelten Ballons als Hightech. Das Material, das die Mongolen verwenden, ist nicht besonders robust", berichtet Andreas Reinhold, der als Fahrer des von dem New Yorker Künstler James Rizzi gestalteten Ballons bekannt ist. Doch das mit Figuren versehene Unikat wollte Reinhold nicht mitnehmen – „zu kostbar".

So packte der leidenschaftliche Hobby-Ballonfahrer ein gelbes Flugobjekt ein, das ein Brauereiunternehmen zur Verfügung gestellt hatte. 892 Quadratmeter Stoff, die sich in aufgeblasenem Zustand zu 2400 Kubikmetern entfalten.

*Braunschweiger Zeitung, 29. 7. 2000*

... und man kann sich nach den technischen Daten üblicher Heißluftballons erkundigen – was weiß das Internet dazu?



### Verschiedene Wege – aber doch gemeinsame Ideen

Typische Schritte bei den Lösungsprozessen zu diesen Beispielen sind:

- Die reale Situation steht im Mittelpunkt, sie bleibt während des Weges hin zu einer Lösung durchgängig lebendig – und dient nicht nur als anfängliche „Einkleidung" für das Rechen-Rezept aus der letzten Stunde.
- Der im Bild beschriebene Sachverhalt wird analysiert, die mathematisch relevanten Gesichtspunkte werden herausgefiltert und die (manchmal durchaus interessanten, aber) für die Fragestellung irrelevanten Informationen werden „beiseite gelegt".
- Eine geeignete Bezugsgröße wird gesucht und ausgewählt (das Kind neben dem Denkmal-Kopf, das Muttertier, die Personen neben dem Heißluftballon).
- Die interessierenden Maße werden aus dem Foto entnommen – durch das eigene Messen wird und bleibt die unvermeidliche Ungenauigkeit bewusst.
- Alltagswissen wird aktiviert (Wie groß ist wohl das Mädchen, der Junge, ein Erwachsener? Wie ist das mit dem Körperbau und dem spezifischen Gewicht bei Muttertier und Kalb?) – falls notwendig, sind noch weitere Informationen von außen zu beschaffen.
- Die Beziehungen zwischen der gewählten Bezugsgröße und der gesuchten Größe werden präzisiert und mathematisch beschrieben.
- Ein dafür geeignetes mathematisches Verfahren wird dabei nicht „auf dem Silbertablett präsentiert", sondern muss erst einmal gesucht und ausgewählt werden.
- Notwendige Vereinfachungen werden vorgenommen (Sind das Mädchen und der Junge ungefähr so groß wie die Kinder in unserer Klasse? Hatte Konrad Adenauer ungefähr die Maße des Lehrers?).
- Ein einfaches mathematisches (Ersatz-)Modell wird gewählt (Kugel, Kegel oder sogar Würfel für den Heißluftballon).
- Es eröffnen sich weiterführende Nach-Fragen (innerhalb und außerhalb der Mathematik), denen je nach Möglichkeit nachgegangen werden kann (Gibt es überhaupt so große Denkmäler? Wie viel Wolle braucht man wohl für eine passende Pudelmütze? Wie groß ist die Hülle des Ballons? Wie lange müsste man mit einer Fahrrad(heiß-)luftpumpe pumpen?).

Angesichts von Computer und Internet verliert die Lehrkraft ein Stück Autorität. Sie ist weniger der „Wissenslieferant", sie wird eher zum „Wissensmoderator". Wichtig wird zunehmend das souveräne Umgehen mit der Informationsfülle, die saubere Recherche, das Unterscheiden in wichtig und unwichtig, in richtig und fragwürdig, das geschickte Zusammenstellen der Informationen für andere, das Einbauen und Vernetzen in einen Bestand von Kenntnissen, die man sich selbst aneignet.

Und es gibt nicht *den einen* richtigen Weg, nicht *die eine* richtige Antwort.

- **Wie viele Kinder unserer Klasse passen in eine Telefonzelle?**

***Foto mit Telefonzelle***
***und einigen Kindern ...***

## Ein Gedanken-Experiment: Die Telefonzelle

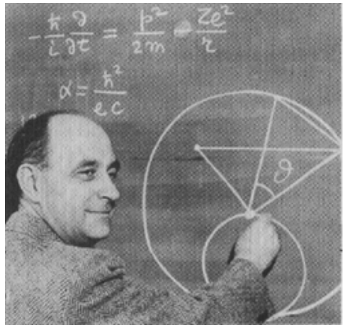
Wie viele Kinder unserer Klasse passen wohl in eine Telefonzelle? Zugegeben: Manche Klasse dürfte es sehr reizen, sich dieser Herausforderung zu stellen ... Wir lassen es jedoch bei einem Gedanken-Experiment bewenden – für die Realisierung gibt es genügend rekordsüchtige Studierenden an US-amerikanischen High Schools, die sich in Telefonzellen und VW-Käfer stopfen.

Quader in die Telefonzelle stapeln – das ginge schon mit etwas Mathematik. Aber Kinder-Körper? Die lassen sich nur eingeschränkt als Quader modellieren. Aber es ist zumindest einen Versuch wert. Wir messen, schätzen, packen, stapeln: Geht es vielleicht noch geschickter? Quer? Längs? Breit?

Eine andere Variante benutzt Alltagswissen aus der Physik: Wie viel wiegt ein Kind aus unserer Klasse? Bei zum Beispiel 40 kg bedeutet das, dass der Körper ein Volumen von ungefähr 40 $dm^3$ hat, denn das spezifische Gewicht eines Menschen ist ungefähr 1 (sonst könnten wir ja nicht schwimmen). Daraus ergibt sich jedenfalls eine Obergrenze für die Anzahl der Kinder, die in eine Telefonzelle passen. Aber ***so*** dicht kann man die Kinder nun wirklich nicht packen, etwas Luft muss sein ... Wie viel Luft wollen/müssen wir einplanen? Vielleicht 20 %? Was bedeutet das dann für unsere „dichteste Packung“? Auf geht’s, rechnen, überlegen, Prozente, multiplizieren, dividieren, diskutieren ...



## FERMI-Aufgaben



Enrico FERMI (geb. 29. 9. 1901 in Rom, gest. 28. 11. 1954 in Chicago), erhielt 1938 den Physik-Nobelpreis für die Entdeckung neuer radioaktiver Elemente und für die Entdeckung von durch langsame Neutronen ausgelösten Kernreaktionen. Ende des zweiten Weltkriegs war er an der Entwicklung der amerikanischen Atombombe beteiligt, wurde anschließend aber entschiedener Gegner von Kernwaffen und setzte sich vor allem gegen den Bau der Wasserstoffbombe ein.

Enrico FERMI war weltweit dafür bekannt, dass er direkte, eher provisorisch anmutende Lösungswege oft den „eleganteren“, feinsinnigen und aufwändigen Methoden vorzog. Um diese Haltung auch an seine Studierenden weiterzugeben, entwickelte er eine besondere Sorte von Fragen, die seither „FERMI-Fragen“ heißen (vgl. HERGET 1999 b).

„Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?“ – vielleicht die wohl bekannteste FERMI-Frage. Zunächst hat man nicht die leiseste Ahnung, wie die Antwort lauten könnte. Auch ist man sich ziemlich sicher, dass die Informationen nicht ausreichen, um überhaupt eine Lösung zu finden. Doch es geht! Wir machen uns mutig auf den Weg, aktivieren unser Alltagswissen (in einer Gruppe finden sich immer wieder erstaunliche Experten!), machen einige plausible Annahmen und hangeln uns von einer Unter-Frage zu der nächsten:

- Wie viele Einwohner hat Chicago? Etwa drei Millionen – notfalls helfen Lexikon oder WWW.
- Eine Durchschnittsfamilie besteht aus etwa drei Personen. Wie viele Familien besitzen ein Klavier? Vielleicht etwa jede zehnte?
- ... dann gibt es rund 100 000 Klaviere in dieser Stadt.
- Wie häufig muss ein Klavier gestimmt werden? Im Schnitt alle 10 Jahre?
- ... dann bedeutet das rund 10 000 Stimmungen pro Jahr.
- Um wie viele Klaviere kann sich ein Klavierstimmer pro Tag kümmern? Vielleicht vier? Er muss ja auch noch hin- und herfahren ...
- Wie viele Tage arbeitet ein Klavierstimmer im Jahr? Vielleicht 200? Mehr als 300 Tage werden es kaum sein. Also vielleicht 250?
- ... das macht für jeden Klavierstimmer bei 250 Arbeitstagen mit je 4 Klavieren (nur gut, dass wir diese Zahlen so schön gewählt hatten!) im Jahr dann rund 1000 Stimmungen ...
- ... also muss es etwa 10 Klavierstimmer in dieser Stadt geben.

Natürlich ist diese Antwort nicht sehr genau, genauso gut könnten es nur fünf oder sogar 100 sein. Aber entscheidend ist die Erfahrung, wie man auf durchaus sehr unterschiedlichen Wegen dennoch zu Näherungen gelangt, die alle „im selben Bereich“ liegen.

„Wie viele Haare hat der Mensch auf dem Kopf?“ – diese FERMI-Frage hat schon vielen Schülerinnen und Schülern heitere Stunden beschert (ROHM 1997): Meist wird der behaarte Teil des Kopfes als Halbkugel betrachtet und die Kinder ermitteln mit dem Lineal am Kopf ihrer Nachbarn eine Schätzung für die Anzahl der Haare pro $cm^2$.

„Wie viel Papier verbraucht unsere Schule in einem Monat?“ „Wie viel Wasser verbraucht ein Kind pro Woche?“ – diese Fragen lassen sich schon in der Grundschule, aber auch später noch bearbeiten (PETER-KOOP 1999).

SA, 5. August – TV-Programm

**Das Wunderwerk Mensch**

**22.10 (VOX)** Eine Zeitreise durch die Evolution: von der Bakterie bis zum Säuger. Die Geburt des Menschen markiert den Start von durchschnittlich 75 Lebensjahren. In dieser Zeit wachsen seine Fingernägel 28 Meter, das Haar 950 Kilometer. Er wird 2580 Mal Sex haben, aber nur zwei Wochen mit Küssen verbringen. **(bis 0.15)**

*prisma, 31/2000*

HAARIGE FAKTEN

**Haben Sie das gewusst?**

**Rund 30 Meter wächst unser Haupthaar täglich**. Aber nur, wenn man alle Haare auf dem Kopf zusammenzählt – im Durchschnitt sind es immerhin 100 000. Dabei wächst jedes einzelne Haar 0,35 Millimeter pro Tag oder knapp einen Zentimeter pro Monat.
**Ein einzelnes Haar ist zwischen 0,03 und 0,15 Millimeter dick.** In einem bleistiftdicken Bündel ließen sich rund 5 000 bis 15 000 Haare unterbringen. Auf einem Quadratzentimeter Kopfhaut wachsen bis zu 350 Haare.
**Blonde haben dünnere Haare,** aber mehr davon, nämlich rund 140 000. Kräftiger ist der Kopfputz bei Dunkelhaarigen (100 000 Haare), noch mehr bei Rothaarigen (85 000).
**Je länger das Haar, desto größer die Chance für Schäden:** Mittellanges Haar ist an den Spitzen etwa 2,5 Jahre alt und bis dahin (bei zwei Wäschen pro Woche) rund 250 Mal gewaschen worden, hat (bei einer Anwendung alle sechs Wochen) 20 Intensivtönungen hinter sich sowie zwei bis drei Sommer mit Sonne und Salzwasser. Kein Wunder, wenn die Haarenden mit Spliss reagieren.
**Haare wachsen unterschiedlich schnell:** Wimpern fallen schon nach 100 bis 150 Tagen aus, Barthaare nach ein bis zwei Jahren. Auf dem Kopf bleiben Haare zwei bis höchstens sieben Jahre.
**Ein einzelnes Haar hält viel aus:** Es kann ein Gewicht von etwa 50 Gramm tragen, ohne dabei zu reißen.

*test, 5/2000, S. 83*

Schon Archimedes von Syrakus versuchte, die Zahl der Sandkörner zu ermitteln, die im Universum Platz hätten – um diejenigen zu widerlegen, die die Unendlichkeit einer solchen Zahl behauptet hatten. Hier noch einige solcher Aufgaben (siehe auch HERGET 1999 b):

- Wie viele Luftballons passen in den Klassenraum?
- Wie viele Zensuren werden in allen deutschen Schulen pro Jahr erteilt?
- Wie viel Geld wird pro Jahr für Nachhilfe, für CDs, für ... ausgegeben?
- Wie viel Kilometer legen die Eltern deiner Schule pro Jahr zurück, um ihre Kinder mit dem Auto zur Schule zu bringen?
- Wie viel $m^2$ Fläche haben alle deutschen Schulklassen zusammen?
- Wie lang wird der Streifen, wenn man eine Zahnpasta-Tube leert?



## Mathematik als Vielfalt

Die Lösungsprozesse dieser Fragen sind voller Lebendigkeit: Mutig machen sich die Schülerinnen und Schüler – und die Lehrperson! – auf den Weg, einzeln, zu zweit oder in einer kleinen Gruppe – statt „zu einer Antwort nur ehrfürchtig aufzuschauen oder sie jemand anderes finden zu lassen“ (VON BAEYER 1994). Kreativ suchen und tasten sie sich Schritt für Schritt näher an eine Lösung heran, streiten über die Zweckmäßigkeit des eingeschlagenen Weges, lachen über offensichtliche Abwege, sind enttäuscht über unerwartete Sackgassen, verteidigen ihren eigenen Weg gegenüber den kritischen Einwänden anderer, entdecken vielleicht erst spät eine arbeitssparende Abkürzung ... und können zum Schluss die wichtige Erfahrung genießen, selbstständig zu einer zumindest angenäherten Lösung gelangt zu sein.

Mathematik kann hier als Vielfalt erlebt werden, nicht als Einengung auf „die richtige Lösung“. Für jeden der Schritte bei der Lösung einer dieser Fragen gibt es meist mehrere verschiedene Möglichkeiten – nicht nur für die Übersetzung der Ausgangssituation in die Sprache der Mathematik, sondern auch für die innermathematischen Lösungswege.

Dazu bedarf es genügend Freiraum und „Fehler-Freundlichkeit“ im Unterricht, damit Schülerinnen und Schüler auf eigenen Wegen zu Lösungen gelangen und diese mit den anderen teilen können – dann kann konstruktive Kritikfähigkeit aus gesundem Selbst-Vertrauen, Selbst-Bewusstsein erwachsen.

## Modellieren als Thema

Die Diskussion all dieser Beispiele macht auch deutlich, was kennzeichnend ist für den Prozess mathematischer Modellbildung: Die Übersetzung einer Fragestellung aus dem „Rest der Welt“ in die Sprache der Mathematik erfordert zwangsläufig immer eine angemessene Vereinfachung – und stets müssen wir uns fragen: Was ist eigentlich angemessen? Und welche Konsequenzen hat diese Vereinfachung?

Im Zentrum stehen dabei nicht eine Formel und das Rechnen mit ihr, sondern vielmehr die Schritte vor dem Rechnen: „Here is a situation. Think about it!“ (Henry POLLAK). Rein rechnerisch-technische Aufgabenteile können heute mehr und mehr mit Hilfe des leistungsfähigen Taschenrechners oder mit Mathematik-Software auf dem PC gelöst werden. Dagegen gewinnen anspruchsvollere Aktivitäten an Bedeutung: Analyse der Problemstellung im „Rest der Welt“, geschickte Übersetzung in die Sprache der Mathematik, in ein passendes mathematisches Modell, innermathematische Behandlung dieser Fragestellung bis hin zu einer Lösung (oder bis hin zu *mehreren* Lösungen) und schließlich die sachgerechte Interpretation und kritische Überprüfung der erhaltenen Ergebnisse: Ist unsere ursprüngliche Frage damit wirklich gelöst? Und wie genau, wie zuverlässig ist das Ergebnis wirklich?

Der typische Prozess der mathematischen Modellbildung kann auf diese Weise an ausgewählten Beispielen im Unterricht zum Thema werden: Die Methode der Modellbildung und die Präzision der Mathematik nutzen, ohne die Differenz zwischen dem mathematischen Modell und der Wirklichkeit aus dem Auge zu verlieren.

»Un missionnaire du moyen âge raconte qu'il avait trouvé le point où le ciel et la Terre se touchent« – Flammarion, C. : L'atmosphère, météorologie populaire. – Paris, Librairie Hachette 1888, S. 163.

## Mathematik macht mündig: Bescheidenheit durch Bescheid-Wissen

Für eine „Offene Mathematik" haben auch FISCHER, MALLE; BÜRGER 1985 plädiert:

- Die „geschlossene" Mathematik ist ein Abarbeiten von Symbolfolgen – für diese Tätigkeit gibt es heute Maschinen.
- Viele in der Schule vermittelte Theorien sind überentwickelt im Vergleich zum „täglichen Bedarf".
- „Geschlossene Modelle" sind fragwürdig geworden, insbesondere wenn es um Voraussagen geht.
- Teamarbeit und Kommunikation sind gefragt: Man muss darstellen, Argumente vorbringen, überzeugen bzw. sich überzeugen lassen.
- „Offene Mathematik" kann bei der Entwicklung geschlossener Mathematik nützlich sein (als Darstellungs- und Kommunikationsmittel), war im Forschungsprozess schon immer von Bedeutung, betont Wissenschaft als perspektivische und nicht als absolute Wahrheit.

Es geht darum, im Unterricht sowohl die Möglichkeiten als auch die Grenzen der Mathematik deutlich zu machen: Mit Mathematik lässt sich vieles leisten, aber bei weitem nicht alles! Mathematik ist ein starkes Hilfsmittel – aber nur eines neben anderen. Wer lernt, dass ein Ergebnis nicht genauer sein kann als die hineingesteckten Annahmen, wer lernt, dass die zugrundegelegten Modelle von Menschen entwickelt und ausgewählt wurden und damit keineswegs unfehlbar sind, wer lernt, dass mit Mathematik auch manipuliert werden kann – der wird nicht gleich ehrfürchtig nicken, wenn ihn jemand mit „ganz genauen" Zahlen beeindrucken will, sei es ein Versicherungsvertreter, ein Politiker, ein Journalist oder ein Mathematiker.



## Nicht immer – aber immer wieder ...

*Wer immer offen ist, muss nicht ganz dicht sein.*
*(Postkarte, Fink & Star)*

Die Erfahrungen mit derartigen Lösungsprozessen zeigen, dass es sich lohnt, den Unterricht zu öffnen und den Anteil von eng geführten Aufgaben zugunsten von „anderen" Aufgaben zu reduzieren (HERGET 2000 a). Aber in welchem Umfang ist dies leistbar? Schließlich kostet dies zusätzliche Zeit und Kraft – um das weit streuende Bearbeitungstempo zu koordinieren, um bereichernde, aber nicht eingeplante Ideen aufzugreifen und schließlich die verschiedenen, oft sehr unterschiedlich anspruchsvollen Ergebnisse zusammenzutragen, auszuwerten und dafür zu sorgen, dass sie für alle transparent werden.

Und natürlich sollen die Schülerinnen und Schüler über ein Mindestmaß an Rechenfertigkeiten verfügen und bestimmte Lösungsverfahren beherrschen – aber sie sollten auch entscheiden (lernen), welches Verfahren sie jeweils wählen, und es sollte auch Aufgaben geben, die gerade dieses eigenständige Suchen, Auswählen, Entscheiden und Bewerten zulassen oder sogar fordern! Sehr sinnvoll ist dies nicht nur bei Einführungssituationen, sondern auch bei den vielfältigen, vertiefenden Übungen und bei den Hausaufgaben, nicht zuletzt wegen der besonderen Möglichkeiten zur Binnendifferenzierung.

Meine Erfahrungen mit den Beispielen hier belegen: Es lohnt, sich hin und wieder einmal etwas länger und intensiver einer einzigen Aufgabe zuzuwenden, um grundsätzliche Barrieren behutsam, aber zielgerichtet abzubauen und nachhaltiges Grundverständnis aufzubauen. Anschließend geht vieles umso leichter und zügiger voran. Das ist dann so, als wenn die rauschende Fregatte nach bestandenen Abenteuern wieder in den schützenden Hafen zurückkehrt – die Mathematik verspricht Sicherheit und Genauigkeit, die es im „Rest der Welt" in diesem Maße nicht gibt, nicht geben kann.

## Sammeln Sie mit!

Weitere Materialien finden Sie, liebe Kollegin, lieber Kollege, auf den nächsten Seiten sowie bei HERGET (2000 b) und bei HERGET; JAHNKE; KROLL. Aber sicherlich finden Sie auch ganz aktuelle Bilder, vielleicht sogar aus der Lokalpresse, zu Ereignissen, die die Lebenswelt und die Interessen der Schülerinnen und Schüler berühren.

Viel Erfolg!

Über Ihre Erfahrungen, Hinweise, Anregungen, Kritik, neue Ideen und weitere Materialien würde ich mich sehr freuen: **wilfried.herget@mathematik.uni-halle.de**

Wilfried Herget 2000

## Literatur

BLANKENAGEL, Jürgen (1983): Schätzen, Überschlagen, Runden. Bestandsaufnahme, Reflexion von Bedeutung und Möglichkeiten. – In: *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe* 11 (1983) 8, S. 278–284 und 9, S. 315–322.

BURKHARDT, H. (1981): The Real World and Mathematics. – Blackie, Glasgow.

BUSSE, Andreas: Mathematische Modellbildung aus der Sicht des Subjekts. – In: MNU 52 (1999) 7, 243–245.

FISCHER, Roland; MALLE, Günter; BÜRGER, Heinrich: Mensch und Mathematik. BI, Mannheim/Wien/Zürich 1985.

HERGET, Wilfried (1999 a): Ganz genau – genau das ist Mathe! – In: *mathematik lehren* 93 (April 1999), S. 4–9.

HERGET, Wilfried (1999 b): Ungefähr ... richtig! Mathe-Welt. – In: *mathematik lehren* 93 (April 1999), S. 23–46.

HERGET, Wilfried (2000 a): Rechnen können reicht ... eben nicht! – In: *mathematik lehren* 100 (Juni 2000), S. 4–10.

HERGET, Wilfried (2000 b): Wie groß? Wie hoch? Wie schwer? Wie viele? Mathe-Welt. – In: *mathematik lehren* 101 (August 2000), S. 23–46.

HERGET, Wilfried; JAHNKE, Thomas; KROLL, Wolfgang (2001): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. – Cornelsen, Berlin.

HERGET, Wilfried; SCHOLZ, Dietmar (1998): Die etwas andere Aufgabe – aus der Zeitung. Mathematik-Aufgaben Sek. I. – Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze.

PETER-KOOP, Andrea (1999): „Das sind so ungefähr 30 000“. Schätzen und Überschlagsrechnen „aus der Sache heraus“. – In: *Die Grundschulzeitschrift* 125 (1999), S. 12–15.

ROHM, Wilfried (1997): Kopfrechnen – noch aktuell? – In: *Arbeitsgruppe für Modernen Mathematik-Unterricht (AMMU)* 10/Juni 1997, Beitrag 6, S. 1–11.

SCHEID, Harald (1994): Der Fetisch der Ganzzahligkeit. – In: PICKERT; WEIDIG (Hrsg.): Mathematik erfahren und lehren. – Klett, Stuttgart, S. 179–184.

VON BAEYER, Hans Christian (1994): Essay: Fermis Lösung. – In: TIPLER, Paul A.: Physik. – Spektrum, Heidelberg-Berlin-Oxford, S. 10–13.