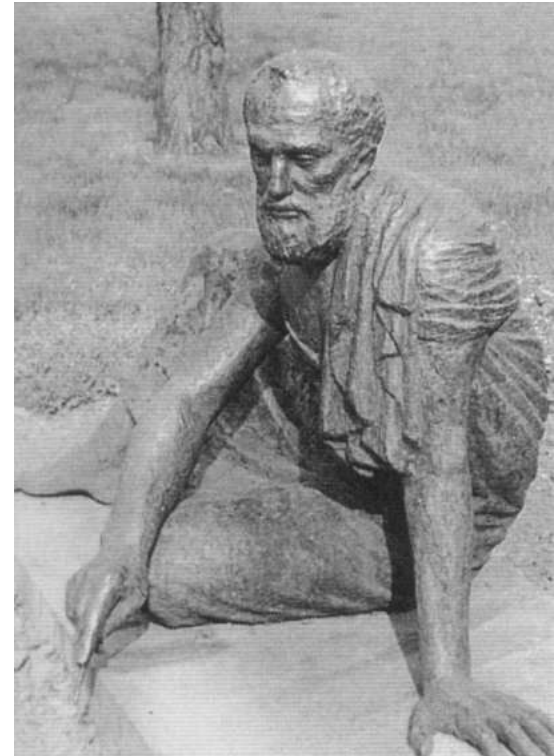


Geschichte der Mathematik
Sommersemester 2006



Studiennachweis (zum Modul Mathematik und Gesellschaft):

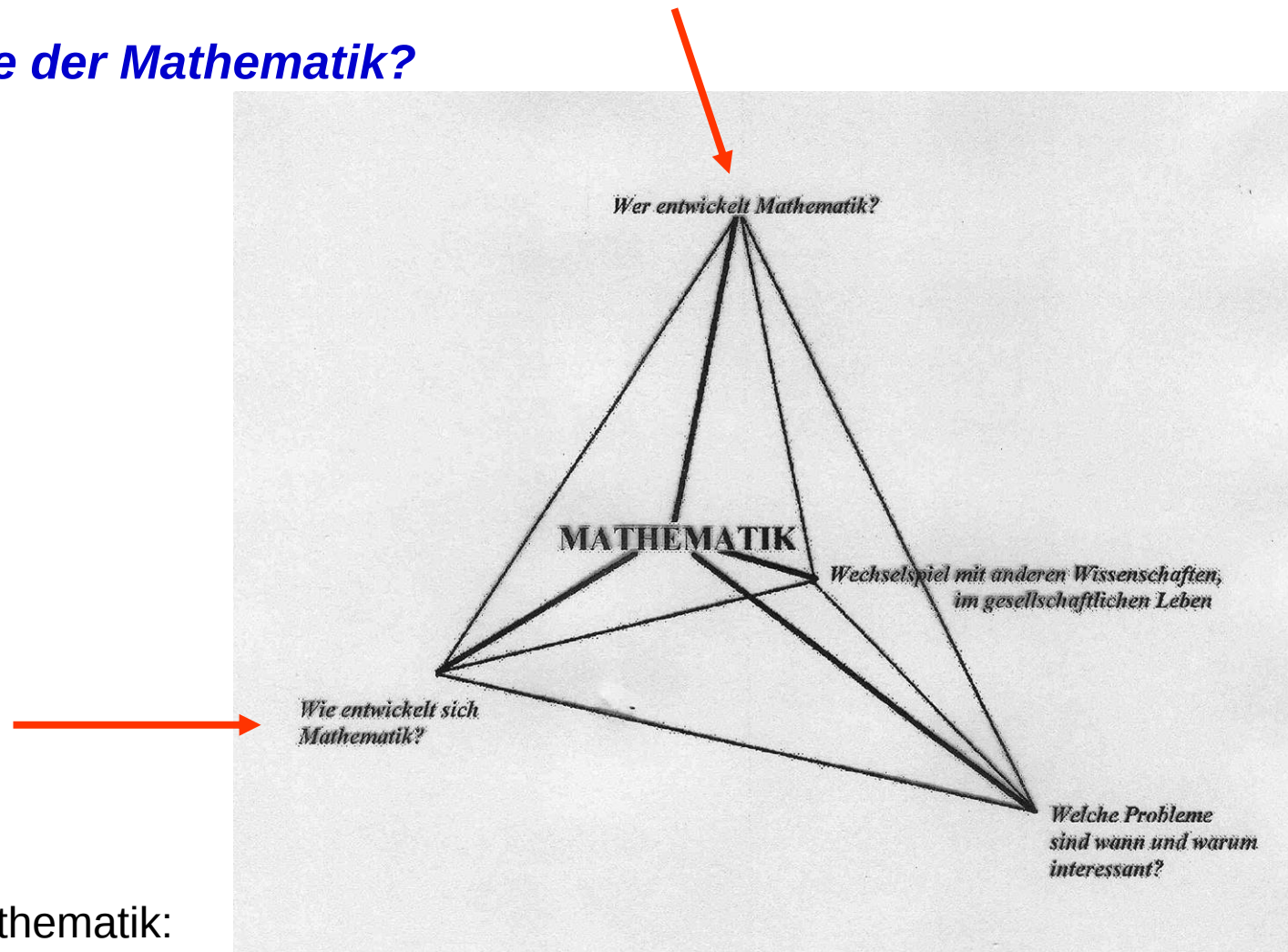
von den im Rahmen der Vorlesung gestellten
Aufgaben sind (mindestens) 3 schriftlich zu lösen

Das Skript der Vorlesung können Sie sich im Netz unter der URL

http://w3.mathematik.uni-halle.de/didakt/mitarbeiter/richter/public_html/index.html

herunterladen.

Geschichte der Mathematik?



Zeitreise Mathematik:

Verstehen, Einordnen von Mathematik
als sich entwickelnde Wissenschaft
im gesellschaftlichen Kontext



**Neueste Entwicklungen in der
Mathematik**

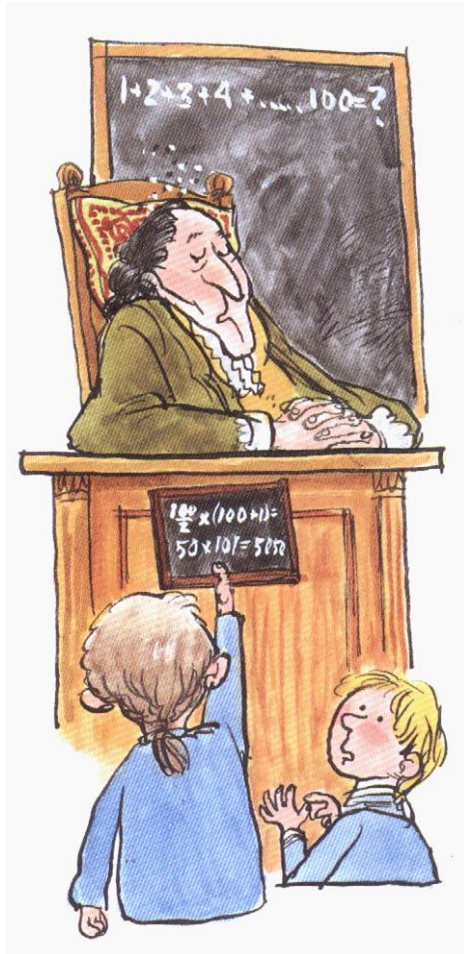
***Entwicklung eines bestimmten
mathematischen Gebiets?***

***Von den Wurzeln
bis zu aktuellen
Erkenntnissen.***

Anfänge der Mathematik

Vorwissenschaftliche Phase

Geschichte der Mathematik im Mathematikunterricht?

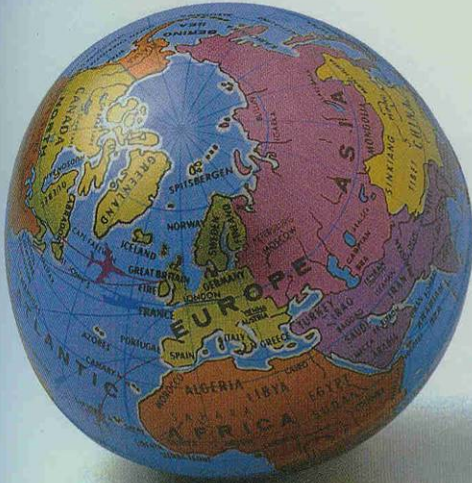


Viele Anknüpfungspunkte

Bereicherung des Mathematikverständnisses

geschichtliche und kulturelle Einblicke

Mathematik ist nichts Starres,
Abgeschlossenes, sondern etwas
Lebendiges

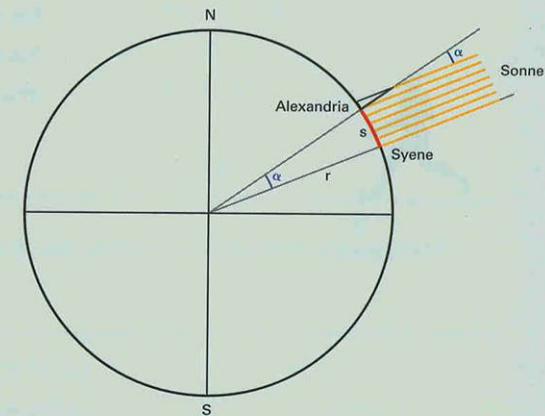
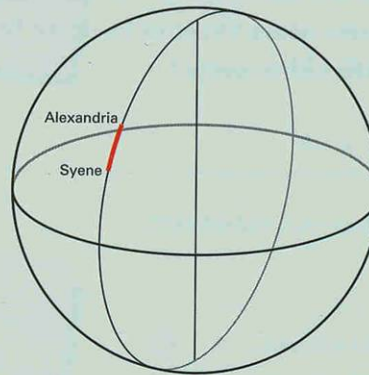


Erdumfang

Dem griechischen Naturphilosophen und Mathematiker Eratosthenes (etwa 275–215 v. Chr.) wurde berichtet, dass sich zur Sommersonnenwende in Syene, einer Stadt in Ägypten, die Sonne mittags in einem tiefen Brunnen spiegle. Das war möglich, weil die Sonne zu diesem Zeitpunkt genau im Zenit stand.

In seiner Heimatstadt Alexandria (auf dem gleichen Meridian nördlich von Syene) warf ein Obelisk zur selben Zeit einen kurzen Schatten. Eratosthenes konnte damit den Winkel α zwischen dem Sonnenstrahl und der Achse des Obeliskens ermitteln.

Er kam auf den fünfzigsten Teil eines Vollwinkels ($\frac{1}{50}$ von 360°). Der Abstand der beiden Orte war schon damals bekannt, nämlich 50 000 Stadien. Also musste der Erdumfang $50 \cdot 50\,000$ Stadien betragen.



Heute lässt sich nicht mehr genau rekonstruieren, welche Länge einem Stadion entsprach. Annahmen schwanken zwischen 160 und 185 Metern. Daraus ergibt sich ein Erdumfang

Mathbu.ch 9+

Schulbuchverlag blmv Bern 2004

Abschnitt „Formeln für die Kugelberechnung herleiten und anwenden“

Wir wollen uns auf zwei grundlegende mathematische Themenkreise konzentrieren:

- ***Die Fähigkeit zu rechnen***
- ***Die Untersuchung der geometrischen Beschaffenheit des Raumes***

Beide Schwerpunkte durchziehen wie ein roter Faden die Mathematik von ihren Anfängen bis in unsere Zeit.

Beide Themen haben ihre spezifische Eigenart, sind aber zugleich untrennbar mit einander verbunden.

Beide Problemkreise sind in ihrer Entwicklung in die kulturelle Entwicklung unmittelbar einbezogen.

Der Themenkreise sind fundamental für das Curriculum.

Rahmenrichtlinien Sachsen-Anhalt:

Kl. 5/6: natürliche Zahlen

(Zahlbegriff, Herausbildung der natürlichen Zahlen,
Zahlenschreibweise, Dezimalzahlen)

Abakus-Rechnen,

Adam Ries

*schriftliche Multiplikation nach dem Prinzip der Neper-
Stäbchen*

Rechentricks

....

Gemeine Brüche, Dezimalbrüche

(*Entstehung der Brüche, Herausbildung der Dezimalbrüche*)

Größen und geometrische Figuren

(geometrische Grundbegriffe, Konstruktionen, entstehen von
Maßeinheiten, Symmetrien)

Euklid

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Vergleiche von Maßeinheiten unterschiedlicher Kulturen

Kl. 7/8: Zahlen und Größen

(Vorstellungen zum Rechnen mit negativen Zahlen,
rationale Zahlen, Quadratwurzeln)

*Näherungsrechnungen in der Geschichte (Quadratwurzeln,
Flächenabschätzungen)*

lineare Gleichungen, Arbeiten mit Variablen

(rechnerische und graphische Lösung, Variablenbegriff)

Lösungsmethoden in der Antike

Algebra des arabischen Mathematikers al Hwarizmi

Geometrie

(einfache Flächen- und Volumenberechnungen,
darstellende Geometrie, Dreieckssätze, insbesondere
Euklid, Phythagoras, Thales)

Trapezberechnung der Babylonier

Kreisberechnung nach Archimedes

Möglichkeiten zur näherungsweisen Berechnung von π

Kl. 9/10: Gleichungssysteme, quadratische Gleichungen, Funktionen
(Lösung von Gleichungssystemen,
Lösung quadratischer Gleichungen,
Ausblick auf die Lösung von Gleichungen höheren Grades,
einfache Funktionstypen)

*rechnerische und konstruktive Lösungsmethoden in der
Geschichte,
Herausbildung des Funktionsbegriffs (Leibnitz, Euler)*

Geometrie

(Volumenberechnungen, insbesondere Pyramide und Kugel)

Näherungsberechnungen in der Antike

Trigonometrie und Winkelfunktionen

*Wurzeln der Trigonometrie, Zusammenhänge mit der Astro-
nomie, Aufstellung und Berechnung trigonometrischer Tabellen*

Elemente der Stochastik

*Glücksspiele als historische Wurzel der Stochastik,
Laplace und Bernoulli,
Anfänge der Statistik: Versicherungen*

Fähigkeit zu rechnen

- Entwicklung der Technik,
Entwicklung der Fähigkeit, immer kompliziertere Formen der Gesellschaft zu organisieren

Erkenntnis der geometrischen Beschaffenheit des Raumes

- Entwicklung von Modellen des physikalischen Universums,
Praktische Anwendung dieser Erkenntnisse, um immer besser auf die Natur einwirken zu können,
philosophische Betrachtungen

Komplexe geometrische Betrachtungen

↔ entwickelte rechnerische Fähigkeiten

1. Die ersten Anfänge: Zahlensysteme und die Erfindung der Stellenwertsysteme

Urgesellschaft

- Auseinandersetzung mit der Natur
 - Zusammenleben
-
- Sesshaft werden
 - Notwendigkeit zu kommunizieren
 - Notwendigkeit, das Zusammenleben zu regeln und zu verwalten

Regeln für Ackerbau und Viehzucht, für Austausch und Handel, für den Kult werden zu Triebkräften für die Herausbildung mathematischer Denkweisen

Erfahrungswissen

Gebrauchswissen

spontan angeregte Untersuchungen

→ Der Zahlbegriff bildet sich heraus.

*Mathematik ist Sprache.
Mathematik ist Werkzeug.
Mathematik ist Hilfsmittel.
Mathematik ist überall.
Mathematik ist Fantasie.*

*Woher kommen die Ziffern? Aus dem Dunkel der Geschichte.
Eine Antwort, die gar nicht erst versucht, unsere Unkenntnis zu
verschleiern.*

Georges Ifrah

Woher kommen die Zahlen?

Gespräch mit der kleinen Luise:

Ich möchte Bonbons haben.

Wie viele möchtest du?

Na: Eins und noch eins und noch eins und dann alle.

1,2,3,...

I, II, III, ...

 = 142123

...

Der Umgang mit den Ziffern 1,2,...,9 ist für uns so alltäglich, dass wir darin fast einen angeborene Fähigkeit des Menschen sehen – wie das Gehen oder das Sprachvermögen. Wir müssen uns erst daran erinnern, wie mühsam wir die Anwendung der Zahlen erlernt haben ..., um zu erahnen, dass es sich dabei um etwas Erfundenes und Überliefertes handelt.

G. Ifrah

Ausdruck von Mengenvorstellungen

Zählen ohne Zählen zu können?

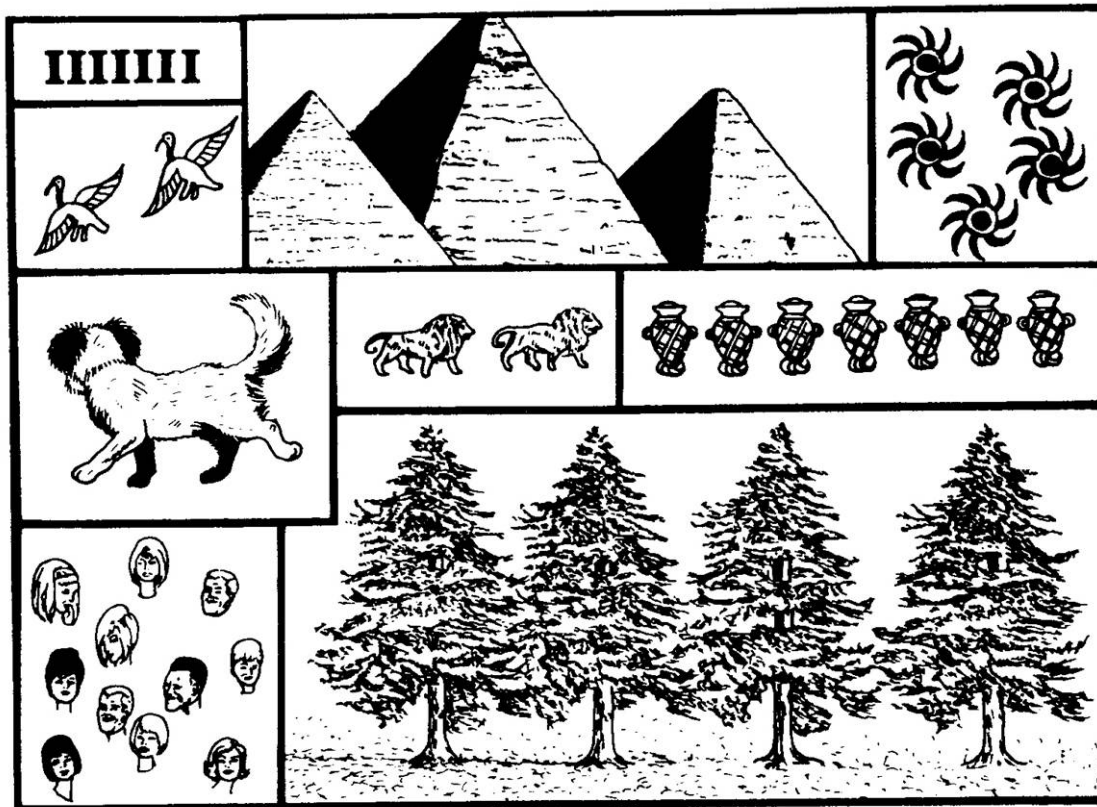
→ Zuordnung zwischen den verschiedener Mengen
(1-1-Zuordnung)

Voraussetzung für das Zählen:

Festlegung einer Rangfolge der zu zählenden Objekte,
Vollziehbarkeit des Übergangs Objekt → Nachfolgerobjekt,
Wiederholbarkeit dieses Übergangs

verscheidene „Sorten von Zahlen: Kardinalzahlen, Ordinalzahlen

Zahlen zeigen und schreiben



Erfassen von Objektmengen,

Möglichkeit, Anzahlen zu vergleichen: mehr als

Einfache Symbole, die die Grundzahlen 1,2,3,... wiedergeben:

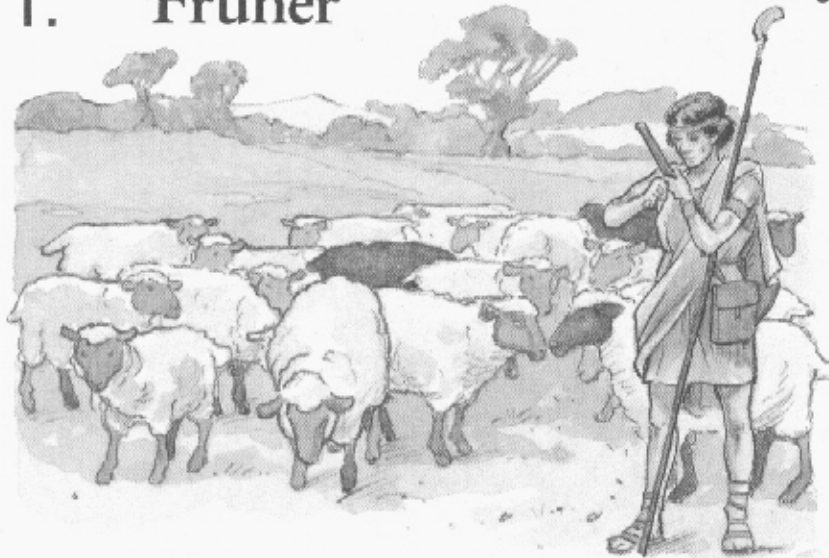


Numerische **Aufzeichnungen** mittels Strichen (Kerben) auf einem Stab.

Frühe Beispiele finden sich bereits in der Altsteinzeit (ab etwa 30000 v. Chr.)

Gekerbter Knochen aus der Pekarna-Grotte in Mähren, zwischen 19 000 und 12 000 v.Chr.

1. Früher

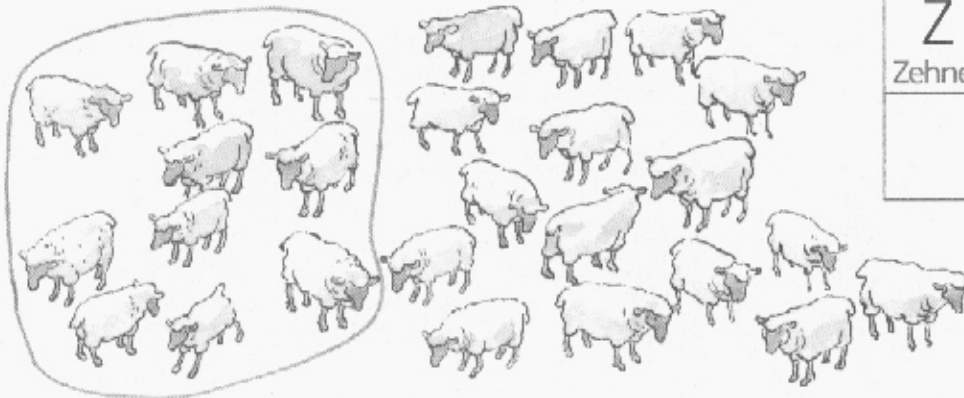


Als die Menschen noch keine Zahlen kannten, nahm ein Hirte ein Stück Holz, wenn er seine Schafe zählen wollte.

Für jedes Schaf schnitt er eine Kerbe ein.



2. Heute



Z	E
Zehner	Einer

= _____

Frühe *Belege* für den Gebrauch von Zahlen:

35 000 v. Chr. ***Swasiland (Südafrika)***

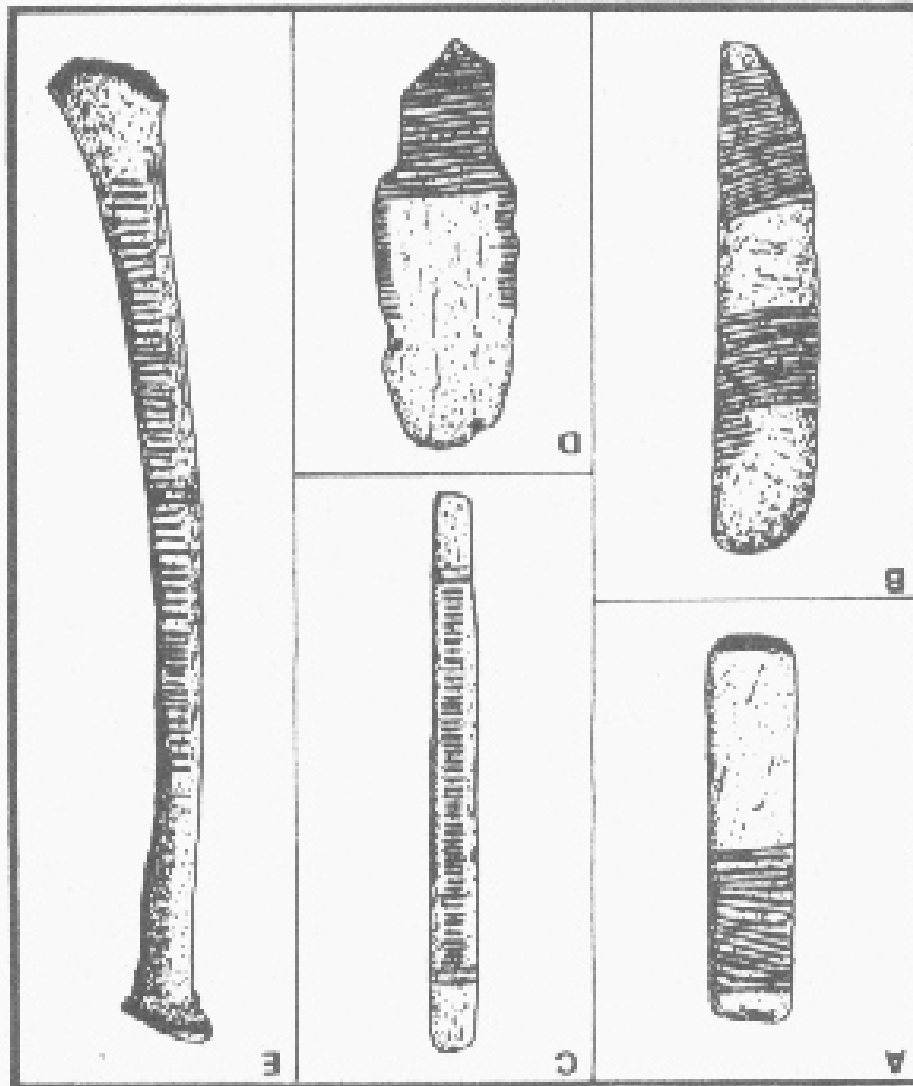
Wadenbeinknochen eines Pavians mit 29 deutlichen Einkerbungen
(vergleichbar: namibische „Kalender-Stöcke“, mit denen Zeitabschnitte
markiert werden)

30 000 v. Chr. ***Tschechien***

Speichenknochen eines Wolfs mit 55 Kerben, die zu Gruppen von je 5
Kerben angeordnet sind

20 000 v. Chr. **Ufer des Lake Edwards, Grenzgebiet zwischen Uganda
und Zaire**

„Ishango-Knochen“: es wird eine Beziehung zwischen den
Einkerbungen und den Mondphasen vermutet



Gekerbte Knochen aus
dem Spätpaläolithikum
(30 000 – 12 000 v. Chr.)

Es lassen sich bereits
Kerben-Bündelungen
erkennen.

Buchführung mit Kerbstöcken, mit Kieselsteinen, Knöchelchen ...

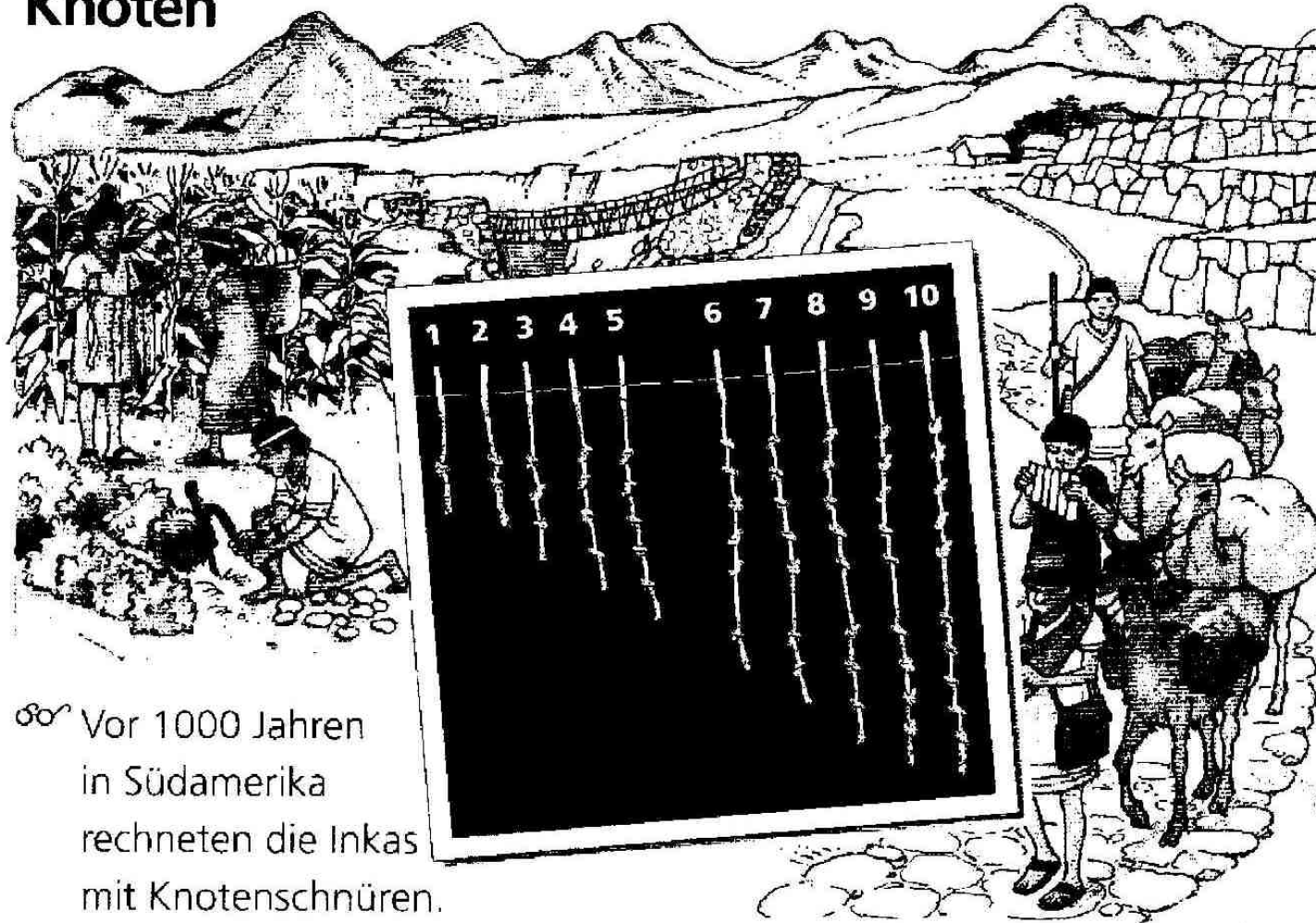
Neben Kerben zum Zählen waren es vor allem Steinchen, die schon früh zum Darstellen von Zahlen benutzt wurden.

Diese Zählsteinchen wurden im Lateinischen *calculi* genannt. Unser Wort *kalkulieren* hängt damit zusammen.

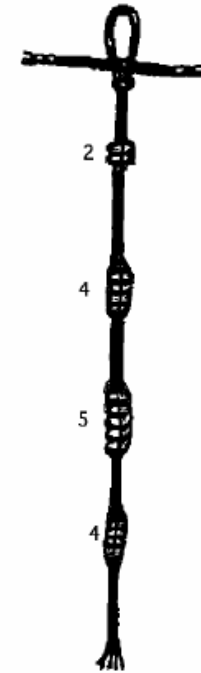
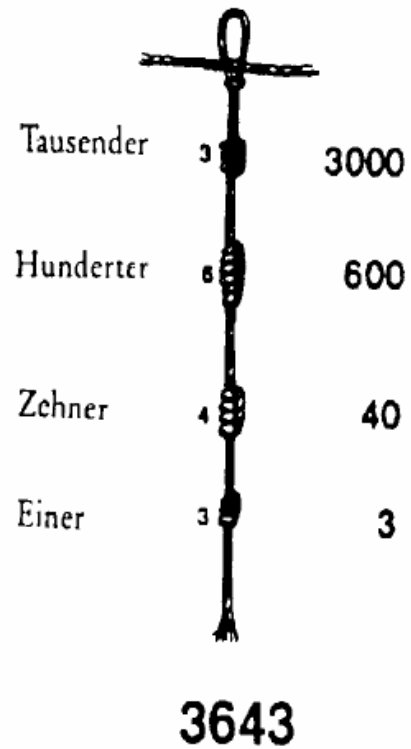


„Zählsteinchen“ aus ungebranntem Ton, die bei den Ausgrabungen der antiken Perser-Stadt Susa (im heutigen Iran) gefunden wurden; ungefähr 3300 v.Chr. angefertigt.

Knoten



80 Vor 1000 Jahren
in Südamerika
rechneten die Inkas
mit Knotenschnüren.



Die Inkas: Hochkultur ohne Räder, Zugtiere oder Schrift im eigentlichen Sinn.

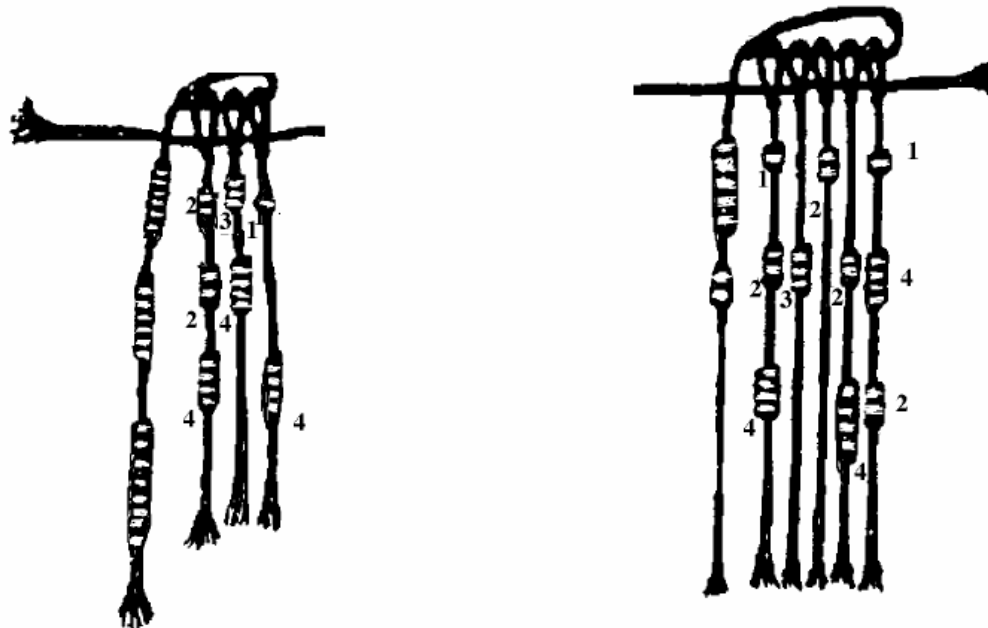
Ausgeklügeltes Archivierungssystem: Knotenschnüre.

Die Knotenschnüre wurden im Normalfall nicht einzeln, sondern in Form von Bündeln verwendet.

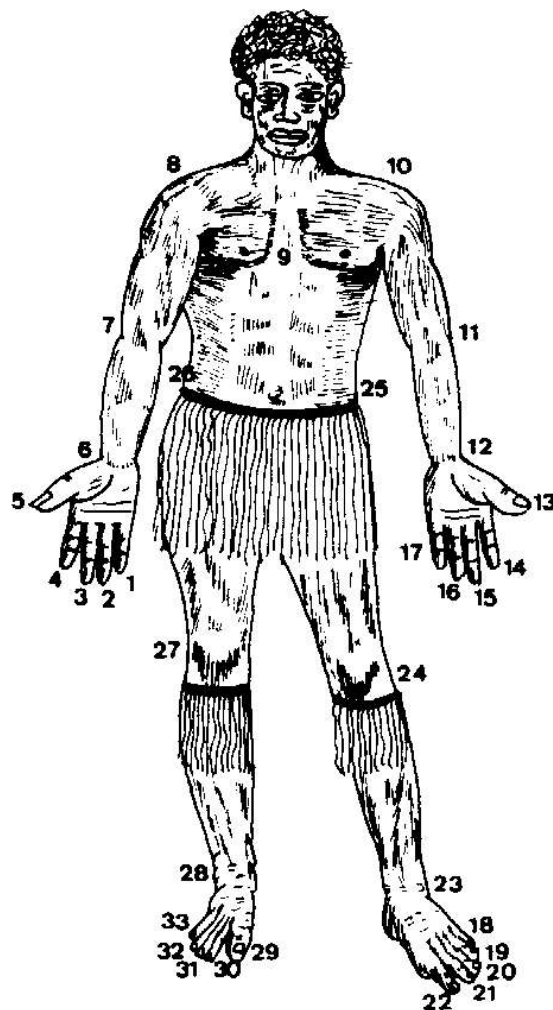
In dem linken Bündel (4 Schnüre) unten ist angegeben, wieviel Lamas es in einem Bezirk gab. Die rechte Schnur gibt die Anzahl der männlichen, die nächste die Anzahl der Milchtiere und die dritte Schnur die Anzahl der Jungtiere an.

In dem rechten Bündel (6 Schnüre) unten ist angegeben, wieviel Kleinvieh es in dem Dorf gab. Die rechte Schnur gibt die Anzahl der männlichen Alpakas, die nächste die Anzahl der Lämmer und die dritte Schnur die Anzahl der Ziegen an, die vierte die Anzahl der Jungziegen und die fünfte die Anzahl der weiblichen Alpakas.

Aufgabe3: Bestimmt die Anzahlen und findet heraus, was die linke etwas längere Schnur angibt



Arbeitsauftrag Kl. 5: Stellenwertsysteme



- 1: Kleiner Finger der rechten Hand
- 2: Rechter Ringfinger
- 3: Rechter Mittelfinger
- 4: Rechter Zeigefinger
- 5: Rechter Daumen
- 6: Rechtes Handgelenk
- 7: Rechter Ellenbogen
- 8: Rechte Schulter
- 9: Brustbein
- 10: Linke Schulter
- 11: Linker Ellenbogen
- 12: Linkes Handgelenk
- 13: Linker Daumen
- 14: Linker Zeigefinger
- 15: Linker Mittelfinger
- 16: Linker Ringfinger
- 17: Kleiner Finger der linken Hand
- 18: Kleine Zehe links
- 19: darauf folgende Zehe
- 20: darauf folgende Zehe
- 21: darauf folgende Zehe
- 22: Große Zehe links
- 23: Linker Fußknöchel
- 24: Linkes Knie
- 25: Linke Hüfte
- 26: Rechte Hüfte
- 27: Rechtes Knie
- 28: Rechter Fußknöchel
- 29: Große Zehe rechts
- 30: darauf folgende Zehe
- 31: darauf folgende Zehe
- 32: darauf folgende Zehe
- 33: Kleine Zehe rechts

Körperbezogenes Zahlverhalten verschiedener Insulaner der Torres-Straße.

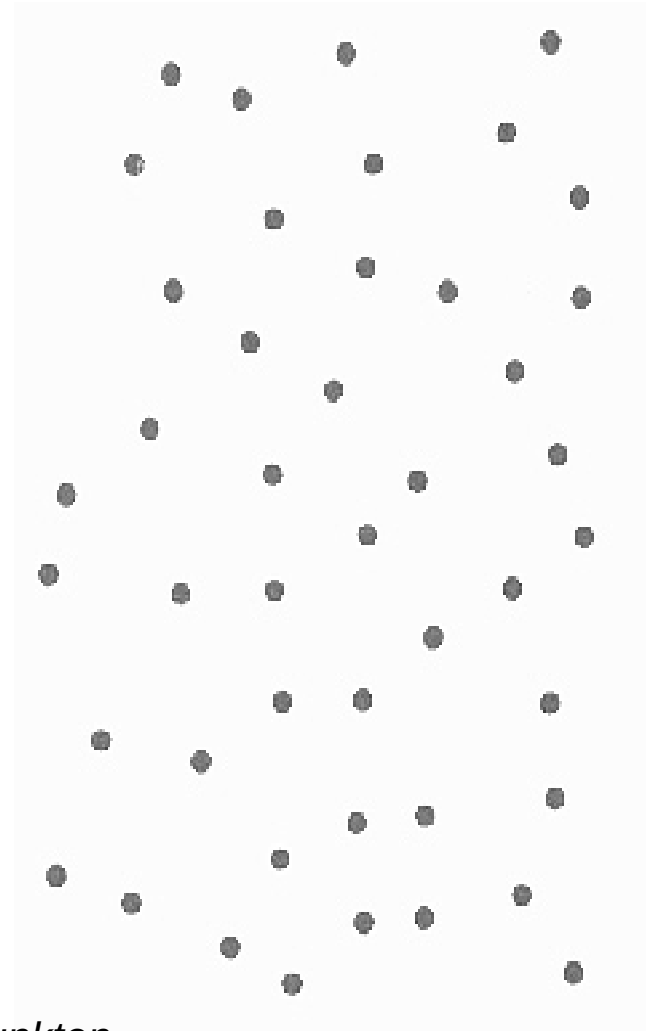
Voraussetzung für das Zählen: Rangfolge

Gegenstände kann man nur dann zählen,
wenn man über folgende Fähigkeiten verfügt:

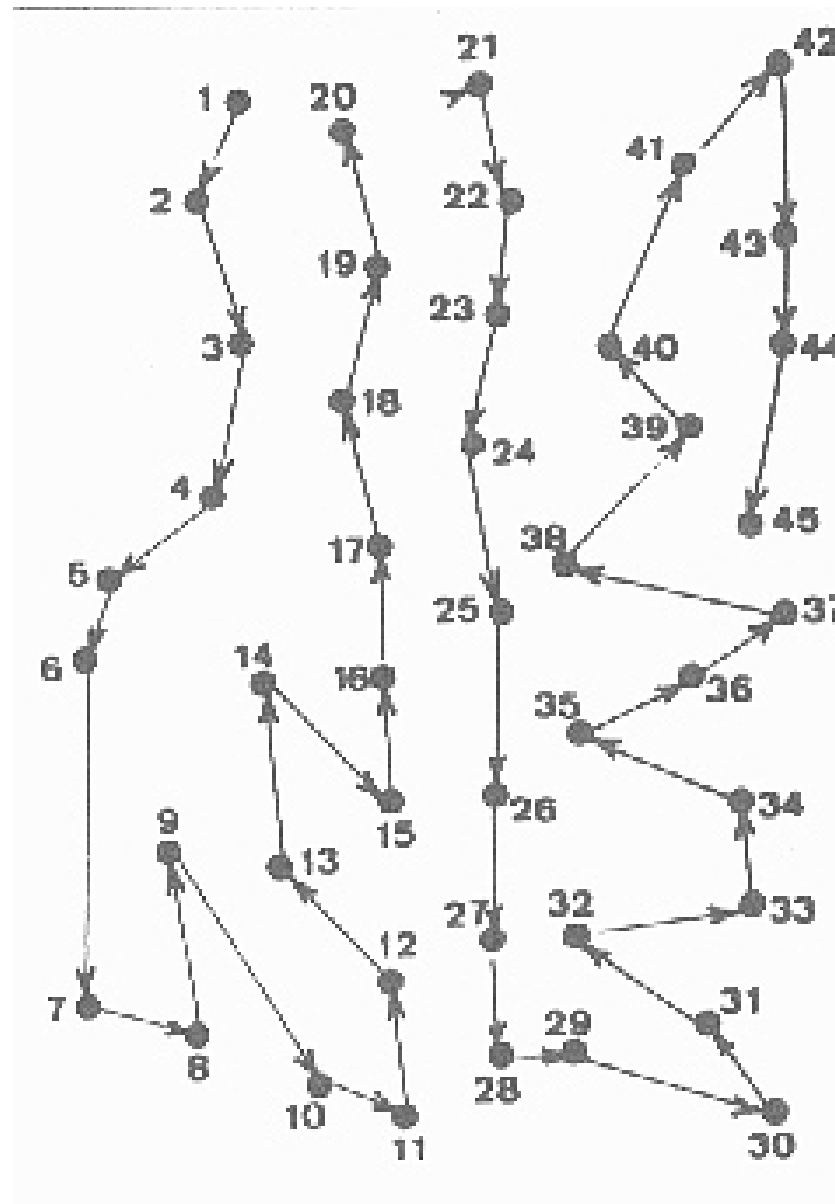
Jedem Gegenstand einer Menge kann ein
„Rang“ zugeordnet werden.

Das Rangzuordnen geschieht schrittweise.

Für jeden Schritt muss die Vorgänger-Nachfolger-
Beziehung klar sein.



*Aus wie vielen Punkten
besteht die Punktwolke?*



Ausdruck von Zahlen durch Gebärden

Boethius (480-524), römischer Philosoph
und Mathematiker, beim Fingerzählen

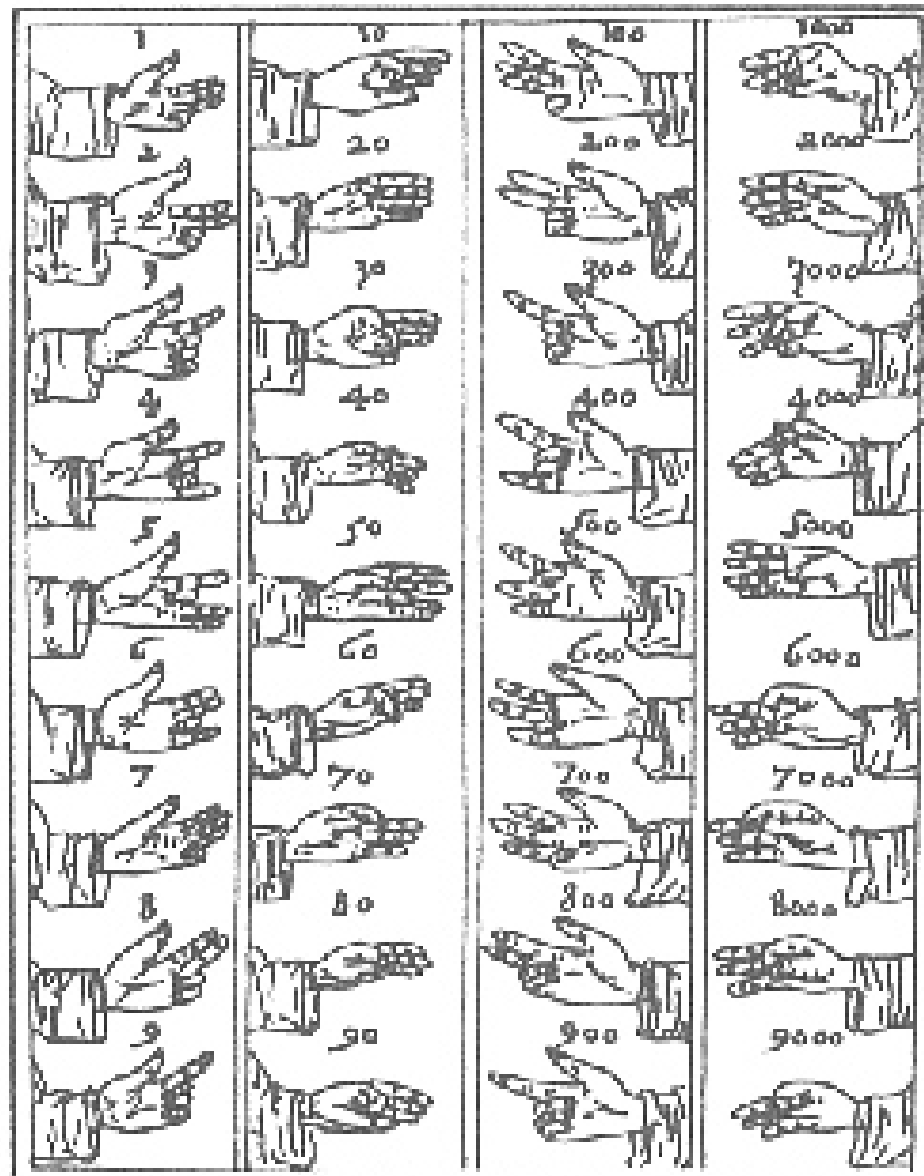




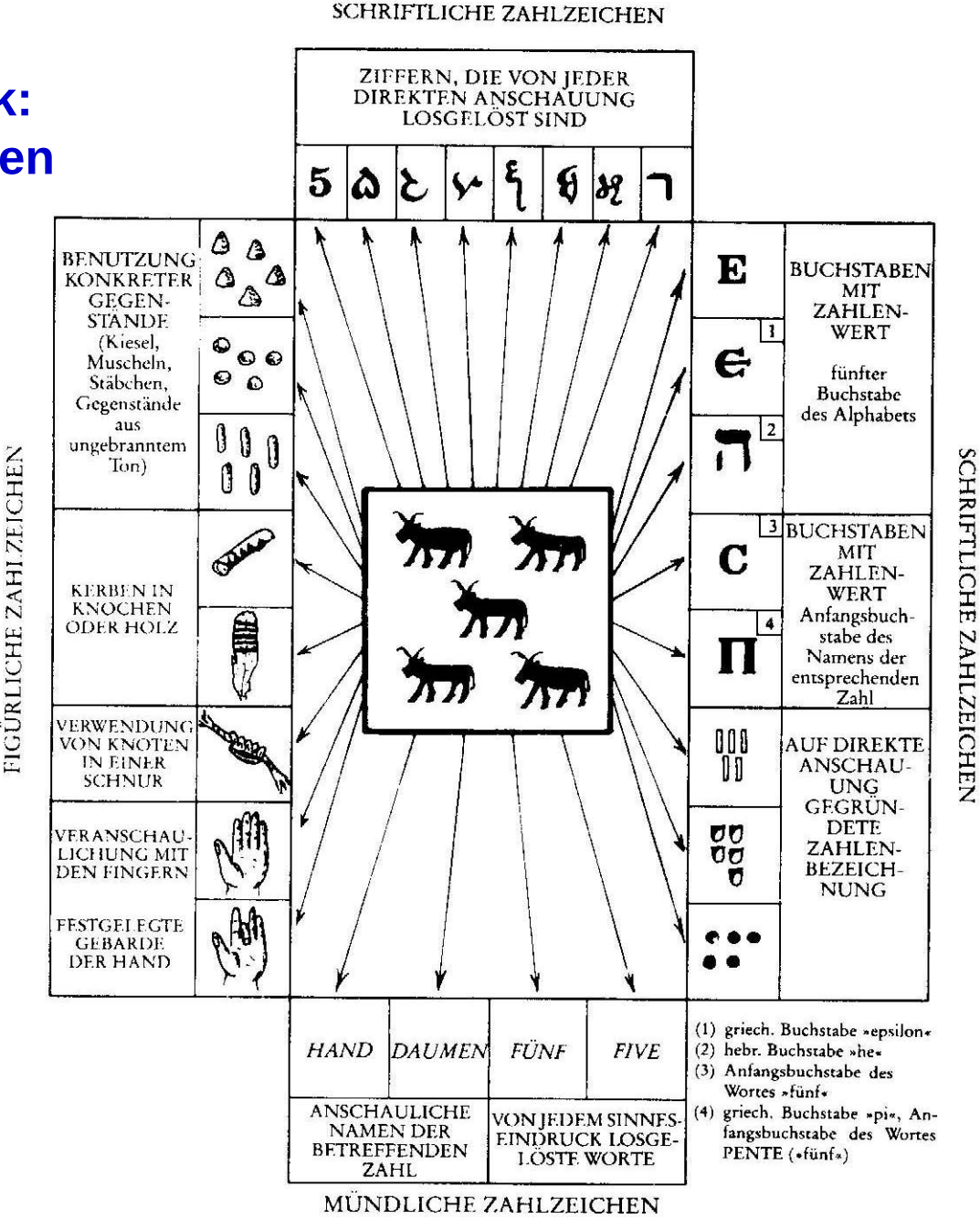
Mora-Spieler auf einem römischen Fresko

2 Spieler stehen sich mit geschlossener Faust gegenüber.
Auf Signal agieren beide gleichzeitig:
Beide öffnen ihre Faust und halten eine willkürliche Anzahl von Fingern hoch.
Beide rufen eine Zahl zwischen 0 und 10.
Ist die gerufene Zahl gleich der Summe der ausgestreckten Finger, gewinnt man einen Punkt.

Fingerzahlen,
aus dem Buch *Summa de
Arithmetica et Geometrica*
des Fra Luca Pacioli, 1494



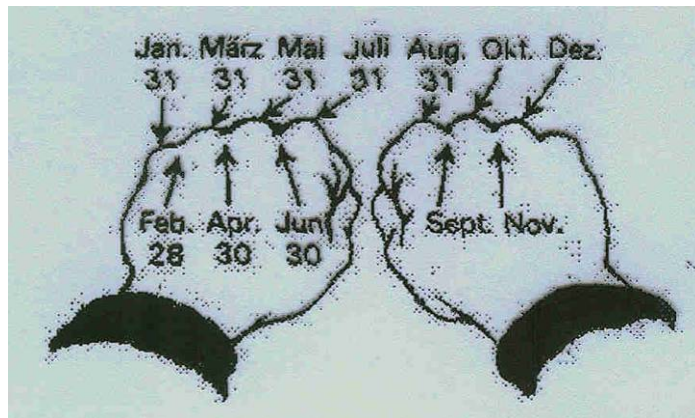
Beginn der Mathematik: Loslösen vom konkreten Zähl-Gegenstand



Kardinal- und Ordinalzahlen

Kardinalität einer Menge:
Anzahl der enthaltenen Elemente

Ordinalzahl:
Nummer des Elementes in der
gewählten Rangfolge



Mehr Nägel als Mensch-ärger-dich-nicht-Figuren?

Wie viele Tage hat der 7. Monat?

Herausbildung von Zahlschriften:

Sumerer: erste belegte Zahlschrift zur Basis 60, additive Schreibweise (um 3000 v. Chr.)

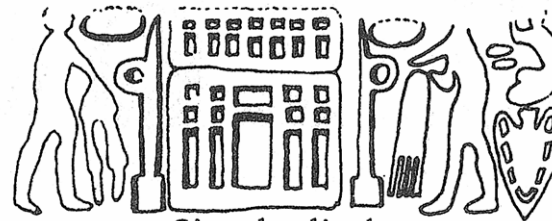


Bulle B
(vgl. Lebrun/Vallat 1978,
Bulle 4, Abb. 3.1., Tafel III)

Calculi
(vgl. Lebrun/Vallat
1978, Tafel I)

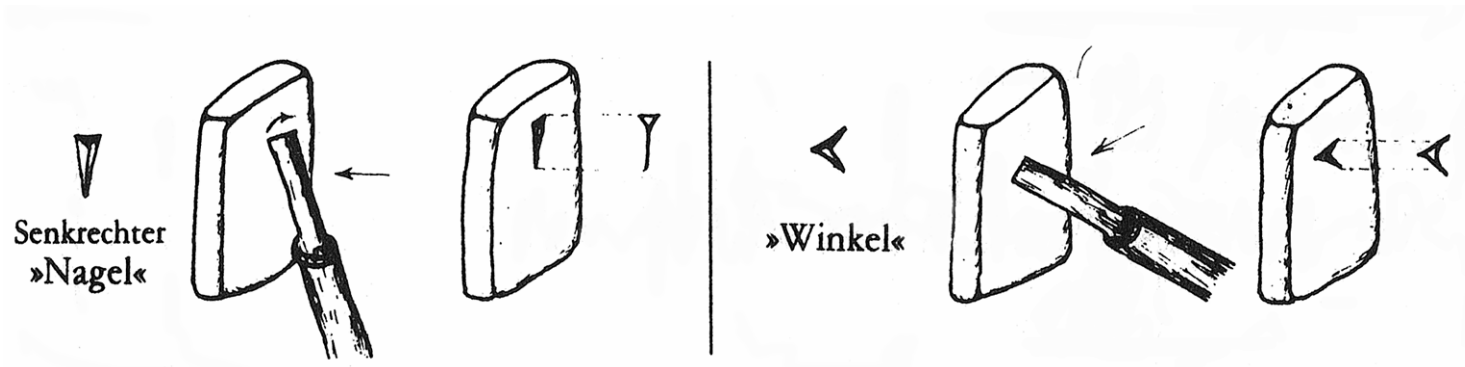


4 Stäbchen + 3 Scheiben



Siegelzylinder
(vgl. Lebrun/Vallat 1978,
Abb. 7.8)

Durch Wechsel der Schreibmaterialien Übergang zu einer neuen
Zahlschrift:



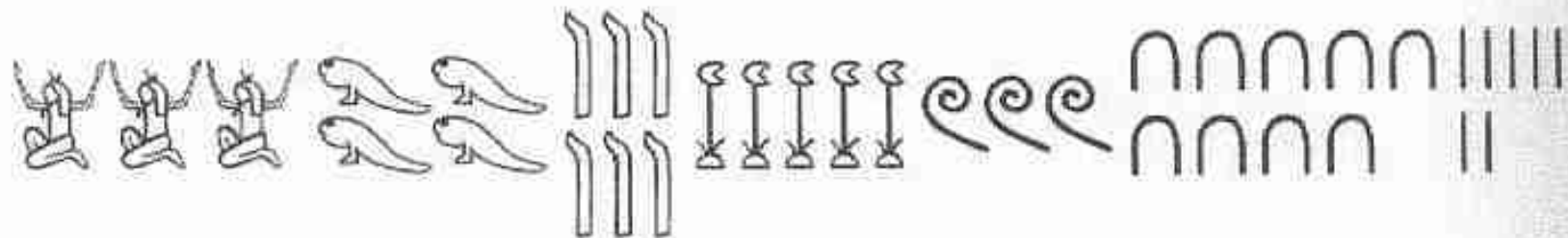
Zahlen in Ägypten (ca. 3 000 v. Chr.)

Die Ägypter entwickelten ein eigenes Zahlensystem mit unterschiedlichen Zeichen für die Zahlen 1, 10, 100, 1 000, ...

1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
						

Zahlen stellten sie durch Aneinanderreihen dieser Zeichen dar.

Die Zahl 3 465 397 in unserer Schreibweise sieht auf Ägyptisch so aus:





Relief aus der Grabkammer des Pthahotep, um 2700 v. Chr.,
links Bestandsaufnahmen: 121 200 und 120 000 Gänse

Babylonier:

kulturelle Erben der Sumerer, übernehmen die Keilschrift

Sexagesimalsystem wird zum Positionssystem ausgebaut.

Trennungszeichen für nicht besetzte Positionen machen sich erforderlich:



Das Sexagesimalsystem wird langsam vom Dezimalsystem verdrängt.

									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Die Zahlzeichen der Babylonier				usw.					
	10	11	12		20	30	40	50	59
Beispiele für babylonische Zahlen									

Die erste Zahl (376) besteht aus den Ziffern 6 und 16. Die erste der beiden Ziffern ist die 60er-Ziffer (vergleichbar mit der Zehner-Ziffer in unserem Dezimalsystem).

Die Darstellung bedeutet: $6 \cdot 60 + 16 = 376$.

Die zweite Zahl (2 583) besteht aus den Ziffern 43 und 3.

Die Darstellung bedeutet: $43 \cdot 60 + 3 = 2\,583$.

Die dritte Zahl besteht aus den Ziffern 4, 2 und 8.

Die Darstellung bedeutet: $4 \cdot 60^2 + 2 \cdot 60 + 8 = 14\,528$.

Griechen: benutzen das babylonische Zahlensystem im wissenschaftlichen Kontext.

Im Alltagsgebrauch wurden verschiedene additive dezimale Zahlenschreibweisen benutzt;
Grundlage für die Zahlzeichen bildete das Alphabet

1	α	Alpha	10	ι	Jota	100	ρ	Rho
2	β	Beta	20	κ	Kappa	200	σ	Sigma
3	γ	Gamma	30	λ	Lambda	300	τ	Tau
4	δ	Delta	40	μ	My	400	υ	Ypsilon
5	ϵ	Epsilon	50	ν	Ny	500	ϕ	Phi
6	ς	Vau	60	ξ	Xi	600	χ	Chi
7	ζ	Zeta	70	$\omicron$	Omicron	700	ψ	Psi
8	η	Eta	80	π	Pi	800	ω	Omega
9	θ	Theta	90	φ	Koppa	900	$\wp$	Sampi
, $\alpha = 1\,000$, $\beta = 2\,000$, usw.								

Entstehungszeit um 700 v. Chr.

849 (dezimal) = $\omega\mu\theta$ (alphabetische Darstellung der Griechen)

Für große Zahlen überschrieben die Griechen das Zeichen M
(attisch für 10 000) mit alphabetischen Ziffern

$$\begin{matrix} \beta \\ \mathbf{M} \end{matrix} = 20000$$

$$\begin{matrix} ,\zeta\rho\omicron\epsilon \\ \mathbf{M} \end{matrix} , \epsilon\omega\omicron\epsilon =$$

Stellenwertsystem zur Basis 10 000,

Ermöglich große Zahlen platzsparend aufzuschreiben

Römer: Die römischen Zahlzeichen entstehen vor dem lateinischen Alphabet, sie gehen auf die Zählweise der Kerbhölzer zurück;
dezimales additives Zahlssystem

Im alten Rom gab es keine Ziffern, sondern Zahlzeichen aus Buchstaben:

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

So schrieben die römischen Kinder mit ihren Griffeln die Zahlreihe:

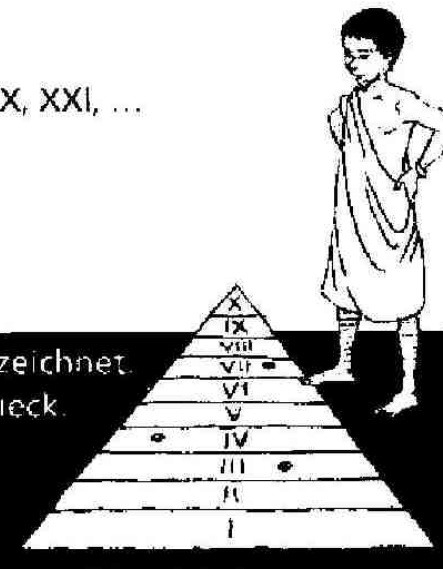
I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XX, XXI, ...

Steht ein Zahlzeichen rechts neben gleichen oder höheren Zahlzeichen, so wird sein Wert addiert, steht es links neben einem höheren, so wird sein Wert subtrahiert.

Beispiele: MMC = 1000 + 1000 + 100, MCM = 1000 + 1000 – 100

Delta-Spiel: Auf dem Boden wird ein großes Dreieck mit Zahlen aufgezeichnet. Jeder wirft aus 2–3 Metern Entfernung 5 Nüsse in das Dreieck. Die Punkte der getroffenen Felder werden addiert und nach Römerart aufgeschrieben, Beispiel: XIV.

Wer nach mehreren Runden die höchste Punktzahl hat, gewinnt.



Nußknacker Kl. 4: römisches Spiel

Inder:

Vermutlich Ausbau des babylonischen dezimalen Zahlensystems zu einem reinen Positionssystem.

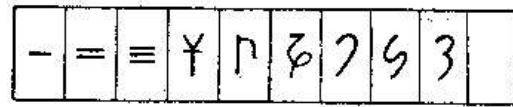
Als Ziffern Darstellungen einer älteren additiven Zahlschrift verwendet.

Araber:

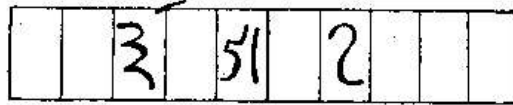
Mit der Ausbreitung des Islam und der Übernahme des arabischen Wissens durch die unterdrückten Völker Ausbreitung des dezimalen Positionssystems in Europa.

Die indischen Ziffern werden nach und nach zu den arabischen Ziffern umgeformt.

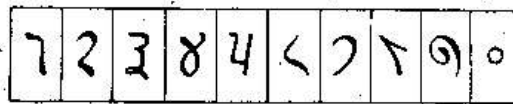
Indisch-arabische Zahlzeichen



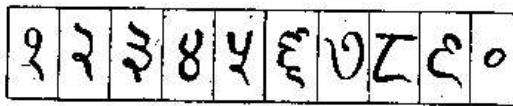
Brahmiziffern einer Nasik-Inschrift um 100 v. Chr. (ohne Stellenwert)



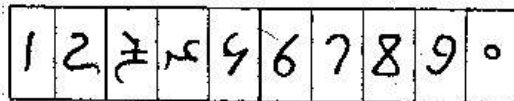
Torkhede-Kupferplatte um 813



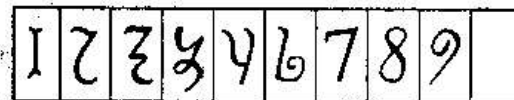
Gwalior-Inschrift um 876



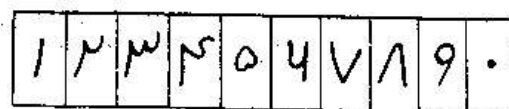
Moderne Sanskritziffern



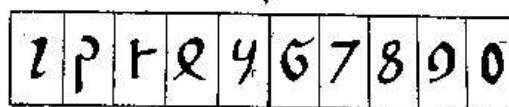
Westarabische Gobarziffern



Ziffern des spanischen Codex Vigilanus
976 n. Chr. (Apices)



Moderne ostarabische (türkische) Ziffern



Ziffern der Wiener Algorithmus-Handschrift
1143 n. Chr.

Europa, seit dem 12./13. Jahrhundert:

Das dezimale Positionssystem mit den arabischen Ziffern setzt sich nach und nach im Kaufmanns- und Alltagsleben durch.

Zahlensysteme mit unterschiedlicher Basis

→ Verkürzung der Darstellungen in rein additiver Schreibweise

Dezimalsystem: überwiegend gebräuchlich;
vermutlich durch den Gebrauch der 10 Finger zum Zählen entstanden

Vingesimalsystem (Basis 20):
Gebrauch der 10 Finger und der 10 Zehen

Sexagesimalsystem (Basis 60): Sumerer, Babylonier, ...,

Entstehung nicht geklärt;

Theon von Alexandria (4. Jhdt. n. Chr.):

„60 ist die von allen Zahlen am einfachsten benutzbare, da sie die niedrigste all derer ist, die sehr viele Divisoren haben, und deshalb am einfachsten genutzt werden kann.“

Aufgabe: Entschlüsseln Sie den mathematischen Inhalt dieser babylonischen Tontafel

Ein Beispiel für die Unterrichtspraxis: Das Entziffern einer „echten“ Tontafel

Sicherlich eine der aufregendsten und gleichzeitig einfach zu verstehenden babylonischen mathematischen Texten befindet sich auf einer kleinen Tonscheibe von ca. 6 cm Durchmesser (Bild 1):

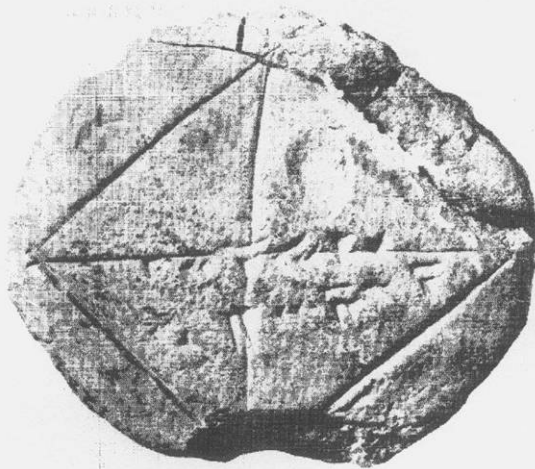


Bild 1: Babylonische Tontafel (Yale Babylonian Collection 7289)

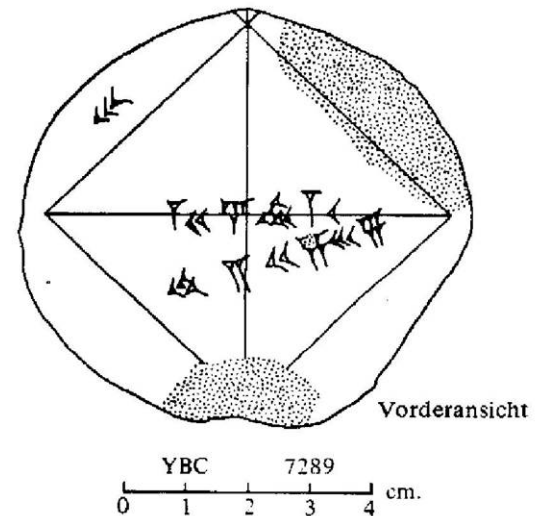


Bild 2: Transkription von YBC 7289

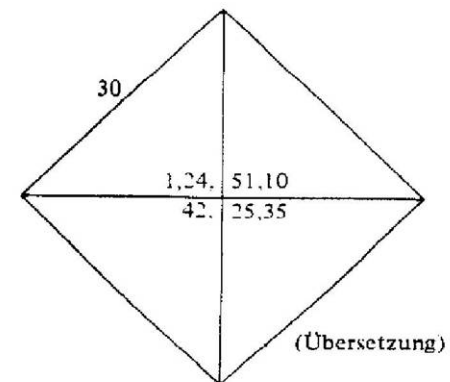


Bild 3: Transliteration von YBC 7289